

Кастриоля

Условие

Задание 2 «Кастриоля»

В этой задаче Вам необходимо описать нагревание и остывание воды в кастрюле с учетом теплообмена с окружающей средой. Как Вам, наверное, известно, мощность тепловых потерь в окружающую среду пропорциональна разности температур тела и окружающей среды:

$$P_{\uparrow} = \alpha(T - T_0), \quad (1)$$

где α - коэффициент тепловых потерь (постоянная для поверхности некоторого вещества величина); T - температура тела; T_0 - температура окружающей среды.

В кастрюлю доверху наливают $m = 3,0$ кг воды (удельная теплоемкость $c = 4200$ Дж/кг $^{\circ}$ С) при $T = 0,0^{\circ}$ С и ставят на плиту.

При решении задачи используйте следующие приближения: - мощность плиты постоянна; - плита передает тепло только кастрюле; - температуры воды и кастрюли всегда одинаковы; - температура окружающей среды остается всегда постоянной; - потери тепла через дно кастрюли отсутствуют; - вода не испаряется; - теплоемкость кастрюли равна нулю.

2.1 Плитку включили и измерили зависимость температуры от времени. В результате были получены следующие данные. От 0° С до 5° С вода нагрелась за 51 секунду; от 40° С до 45° С за 89 секунд; и от 80° С до 85° С за 339 секунд.

2.1.1 Исходя из этих данных, покажите, что мощность тепловых потерь действительно пропорциональна разности температур (формула (1)).

2.1.2 Определите коэффициент тепловых потерь α . Укажите размерность этого коэффициента.

2.1.3 Определите, за какое время вода нагревается от 20° С до 25° С.

2.1.4 Определите, до какой максимальной температуры можно нагреть воду на этой плите.

2.2 После длительного нагревания, плиту выключили, и кастрюля начала остывать. Было обнаружено, что вода остыла от 95° С до 90° С за 67 секунд; от 65° С до 60° С за 114 секунд; и от 35° С до 30° С за 393 секунды.

2.2.1 Покажите, что и в этом случае мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур. **2.2.2** Определите значение комнатной температуры T_0 . **2.2.3** Определите, за какое время вода остывает от 50° С до 45° С. **2.2.4** Используя данные части 2.1, определите мощность электрической плиты P .

Решение

Задание 2 «Кастрюля»

1. В каждом случае вода нагревается на $\Delta T = 5,^{\circ}$ С. Температурный интервал достаточно маленький. Поэтому можно считать, что мощность тепловых потерь в окружающую среду остается практически неизменной в этом интервале. Для большей точности в формулу тепловых потерь

$$P_{\uparrow} = \alpha(T - T_0) \quad (1)$$

будем подставлять среднее значение температуры. В нашем случае:

$$\langle T_1 \rangle = 2,5,^{\circ}\text{C} \quad \langle T_2 \rangle = 42,5,^{\circ}\text{C} \quad \langle T_3 \rangle = 82,5,^{\circ}\text{C}. \quad (2)$$

За некоторый промежуток времени Δt вода получает от плиты количество теплоты равное $P\Delta t$ Дж и отдает в окружающую среду количество теплоты равное $P_{\uparrow}\Delta t$ Дж. Уравнение теплового баланса выглядит следующим образом:

$$cm\Delta T = (P - P_{\uparrow})\Delta t. \quad (3)$$

Подставив выражение для мощности тепловых потерь, запишем уравнение (3) в виде:

$$cm\frac{\Delta T}{\Delta t} = P - \alpha(\langle T \rangle - T_0). \quad (4)$$

Преобразуем уравнение (4) к виду:

$$cm\frac{\Delta T}{\Delta t} = (P + \alpha T_0) - \alpha\langle T \rangle = \beta - \alpha\langle T \rangle, \quad (5)$$

где

$$\beta = P + \alpha T_0 \quad (6)$$

1.1 Используя данные задачи, можно вычислить значение правой части выражения (5) для каждого случая, т.е. для каждой средней температуры (2) найти значение $cm\frac{\Delta T}{\Delta t}$.

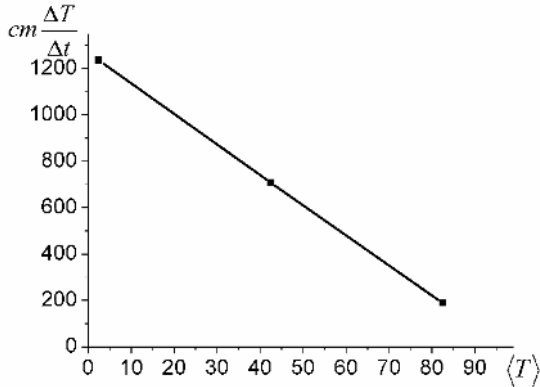
Получим:

$$1. \langle T_1 \rangle = 2,5,^{\circ}C \quad cm\frac{\Delta T}{\Delta t_1} = 1235$$

2.

$$\langle T_2 \rangle = 42,5,^{\circ}C \quad cm\frac{\Delta T}{\Delta t_2} = 708 \quad (7)$$

$$3. \langle T_3 \rangle = 82,5,^{\circ}C \quad cm\frac{\Delta T}{\Delta t_3} = 188$$



Если мощность теплотеря действительно пропорциональна разности температур, то все три точки на графике зависимости $cm\frac{\Delta T}{\Delta t}$ от $\langle T \rangle$ будут находиться на одной прямой. Нетрудно убедиться, что это действительно так (рис. 1).

1.2 Определим постоянные α и β аналитически:

$$\alpha = \frac{cm\frac{\Delta T}{\Delta t_1} - cm\frac{\Delta T}{\Delta t_3}}{\langle T_3 \rangle - \langle T_1 \rangle} = 13 \frac{\text{Вт}}{^{\circ}C}; \quad (8)$$

$$\beta = 1270 \text{ Вт}; \quad (9)$$

1.3 При нагревании от $20,^{\circ}C$ до $25,^{\circ}C$ $\langle T \rangle = 22,5,^{\circ}C$. Подставим это значение, а также значения постоянных α и β в уравнение (5). Получим:

$$cm\frac{\Delta T}{\Delta t_x} = \beta - \alpha\langle T \rangle = 978. \quad (10)$$

Откуда:

$$\Delta t_x = \frac{cm\Delta T}{978} = 64c. \quad (11)$$

1.4 Температура воды перестает изменяться, когда мощность теплопотерь становится равной мощности плиты. При этом правая часть выражения (5) обращается в ноль. Таким образом, максимальная температура равна:

$$T_{\max} = \frac{\beta}{\alpha} = 98^\circ C \quad (12)$$

2.1 При выключенной плите уравнение теплового баланса будет выглядеть следующим образом:

$$cm \frac{\Delta T}{\Delta t} = -\alpha(\langle T \rangle - T_0) = -\alpha \langle T \rangle + \alpha T_0 \quad (13)$$

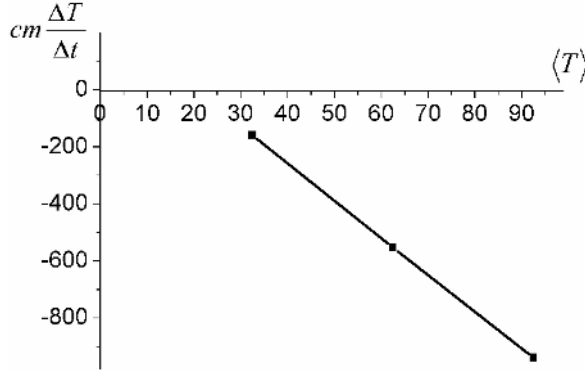
Таким образом, зависимость $cm \frac{\Delta T}{\Delta t}$ от $\langle T \rangle$ и в случае остывания должна быть линейной. Убедимся в этом:

$$1. \langle T_1 \rangle = 92,5^\circ C \quad cm \frac{\Delta T}{\Delta t_1} = -940$$

$$2. \langle T_2 \rangle = 62,5^\circ C \quad cm \frac{\Delta T}{\Delta t_2} = -553. \quad (14)$$

$$3. \langle T_3 \rangle = 32,5^\circ C \quad cm \frac{\Delta T}{\Delta t_3} = -160$$

Зависимость действительно линейная (рис. 2).



2.2 Можно убедиться, что постоянная α и в этом случае равна:

$$\alpha = -\frac{cm \frac{\Delta T}{\Delta t_1} - cm \frac{\Delta T}{\Delta t_3}}{\langle T_3 \rangle - \langle T_1 \rangle} = 13. \quad (15)$$

А постоянная αT_0 :

$$\alpha T_0 = 263 \text{ Вт}. \quad (16)$$

Отсюда определяем значение комнатной температуры:

$$T_0 = 20^\circ C. \quad (17)$$

2.3 При остывании от $50^\circ C$ до $45^\circ C$, средняя температура $\langle T \rangle = 47,5^\circ C$ Подставим известные величины в уравнение (13) и получим время остывания:

$$\Delta t_x = \frac{cm\Delta T}{-\alpha\langle T \rangle + \alpha T_0} = 176c. \quad (18)$$

2.4 Мощность входила в выражение для коэффициента β в первой части задачи (выражение (6)). Зная комнатную температуру, можно вычислить мощность электроплиты:

$$P = \beta - \alpha T_0 = 1,0 \cdot 10^3 Bm. \quad (19)$$