

Гвоздь

Условие

Задача 2 «Гвоздь»

В этой задаче мы предлагаем Вам рассмотреть и проанализировать физические процессы, происходящие при забивании гвоздя. В первой части задачи Вам предстоит описать взаимодействие гвоздя с молотком, а во второй – движение гвоздя в доске после удара.

Часть 1. Удар.

Молоток массой M , движущийся со скоростью v_0 ударяет по гвоздю с массой m . Время взаимодействия молотка и гвоздя очень мало. Удар абсолютно упругий.

1.1 Определите скорость гвоздя u сразу после удара. Выразите эту скорость через v_0 и отношение масс гвоздя и молотка $\gamma = \frac{m}{M}$

1.2 Какой будет скорость гвоздя если его масса очень мала по сравнению с массой молотка ($m \ll M$).

1.3 Определите коэффициент передачи энергии η , равный отношению кинетической энергии гвоздя после удара к кинетической энергии молотка до удара. Выразите этот коэффициент через $\gamma = \frac{m}{M}$.

Часть 2. Движение гвоздя в доске.

При движении гвоздя в доске на него действует значительная сила трения, поэтому силой тяжести, ввиду ее относительной малости, можно пренебречь. Очевидно, что сила трения действует на всю поверхность гвоздя, находящуюся внутри доски. Однако существует определенное различие в природе силы трения, действующей на боковую поверхность гвоздя и на его острие.

Сила, действующая на боковую поверхность, пропорциональна площади поверхности, погруженной в доску, а значит, и длине вбитой части гвоздя (см. рис. 1). Другими словами, $F_{\text{бок}} = kx$, где k – некоторая постоянная величина (далее считайте ее известной), а x – длина вбитой части.

С другой стороны, если доска однородная, то сила, действующая на острие, не должна изменяться. Т.е. можно принять, что $F_{\text{остр}} = f$ – известная далее величина.

Пусть перед ударом гвоздь был вбит на глубину x (размерами острия можно пренебречь). После удара гвоздь получил кинетическую энергию E и «вошел» в доску на величину Δx .

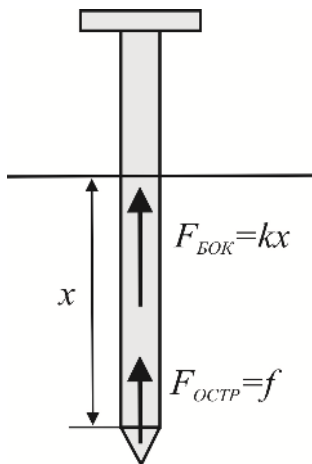
2.1 Выразите Δx через начальные параметры E и x , а также через k и f .

2.2 Пусть длина гвоздя равна l . Определите, какую энергию E_1 нужно передать гвоздю, чтобы вбить его с одного удара.

Рассмотрите крайние случаи, когда одна из сил трения значительно меньше другой.

2.3 Пусть $F_{\text{бок}} \ll F_{\text{остр}}$. Определите количество ударов N_1 , за которое гвоздь полностью «войдет» в доску, если при каждом ударе он получает кинетическую энергию E .

2.4 Пусть $F_{\text{бок}} \gg F_{\text{остр}}$ и по-прежнему при каждом ударе гвоздь получает кинетическую энергию E . Покажите, что квадраты величин вбитой части до удара и после него связаны следующим соотношением: $x_{n+1}^2 = x_n^2 + \varepsilon$. Выразите ε через E и k . Определите также, за какое количество ударов N_2 можно вбить гвоздь в этом случае.



Решение

Задача 2 «Гвоздь»***

Часть 1.

1.1 Запишем закон сохранения энергии и импульса:

$$\begin{cases} Mv_0 = Mv + mu \\ \frac{Mv_0^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Решая систему, получим:

$$u = \frac{2v_0}{\frac{m}{M} + 1} = \frac{2v_0}{\gamma + 1} \quad (2)$$

1.2 При $m \ll M$, $\gamma \rightarrow 0$, поэтому:

$$u = 2v_0 \quad (3)$$

1.3 Коэффициент передачи энергии:

$$\eta = \frac{\frac{mu^2}{2}}{\frac{Mv_0^2}{2}} = \gamma \frac{u^2}{v_0^2} \quad (4)$$

Подставляя значение скорости (2), получим:

$$\eta = 4 \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^2} \quad (5)$$

Часть 2.

2.1 Вся полученная гвоздем кинетическая энергия расходуется на совершение работы против сил трения (изменением потенциальной энергии можно пренебречь). Работа силы трения, действующей на острие гвоздя, равна:

$$A_{\text{остр}} = f \Delta x \quad (6)$$

Работа силы трения, действующей на боковую поверхность, равна:

$$A_{\text{бок}} = k \frac{(x + \Delta x)^2}{2} - k \frac{x^2}{2} \quad (7).$$

Следовательно:

$$E = f\Delta x + k\frac{(x + \Delta x)^2}{2} - k\frac{x^2}{2} \quad (8).$$

Решая это уравнение относительно Δx , получим:

$$\Delta x = -\left(x + \frac{f}{k}\right) + \sqrt{\left(x + \frac{f}{k}\right)^2 + \frac{2E}{k}} \quad (9).$$

Отрицательный корень физического смысла не имеет.

2.2 Для определения энергии E_1 подставим в выражение (9) $x = 0$ и $\Delta x = l$.

$$l = -\frac{f}{k} + \sqrt{\left(\frac{f}{k}\right)^2 + \frac{2E_1}{k}} \quad (10).$$

Решением уравнения является:

$$E_1 = \frac{kl^2}{2} + fl \quad (11).$$

2.3 Если $F_{\text{ВОК}} \ll F_{\text{ОСТР}}$, то глубина погружения после удара будет определяться силами, действующими на острие:

$$\Delta x = \frac{E}{f} \quad (12).$$

Число ударов, очевидно, равно:

$$N_1 = \frac{lf}{E} \quad (13).$$

2.4 Если, $F_{\text{ВОК}} \gg F_{\text{ОСТР}}$, то отношением $\frac{f}{k}$ в выражении (9) можно пренебречь, и тогда:

$$\Delta x = -x + \sqrt{x^2 + \frac{2E}{k}} \quad (14).$$

Величина погружения после $(n + 1)$ -го удара равна:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x = x_n + \left(-x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{2E}{k}}\right) = \sqrt{x_n^2 + \frac{2E}{k}} \quad (15).$$

Или

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{2E}{k} \quad (16).$$

Таким образом:

$$\varepsilon = \frac{2E}{k} \quad (17).$$

Квадраты глубин погружения гвоздя образуют арифметическую прогрессию:

$$x_0^2 = 0, \quad x_1^2 = \frac{2E}{k}, \quad x_2^2 = \frac{4E}{k}, \quad x_3^2 = \frac{6E}{k}, \quad \dots, \quad x_n^2 = n\frac{2E}{k}.$$

Для вбивания гвоздя нужно совершить число N ударов, которое находится из условия:

$$l^2 = N_2 \frac{2E}{k} \quad (18),$$

откуда

$$N_2 = \frac{kl^2}{2E} \quad (19).$$