

Полукольцо

Условие

Задача 2 «Полукольцо»

Часть 1. Введение.

В этой части вам предлагается вспомнить некоторые формулы, касающиеся описания движения простых колебательных систем и динамики твердого тела.

Традиционный подход к расчету периодов гармонических колебаний механических систем заключается в приведении уравнения движения к стандартной форме. Пусть состояние системы полностью характеризуется одной координатой x (это может быть, например, декартова координата материальной точки; угол поворота при вращательном движении). Скорость изменения этой координаты обозначим $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, а ее ускорение (скорость изменения скорости) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Если на основании физических законов и уравнений удастся получить уравнение

$$a = -\omega_0^2 x, \quad (1)$$

где ω_0^2 - положительная постоянная, то из этого уравнения однозначно следует, что величина $x(t)$ изменяется по гармоническому закону с круговой частотой ω_0 . Заметим, что к уравнению (1) можно привести уравнения, основанные на втором законе Ньютона.

Эквивалентным способом расчета периодов колебаний является приведение физических уравнений к виду (которое часто называют **уравнением гармонических колебаний**)

$$v^2 + \omega_0^2 x = const, \quad (2)$$

еще раз подчеркнем, что в этом уравнении обязательно $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Из уравнения (2) также однозначно следует, что величина $x(t)$ изменяется по гармоническому закону с круговой частотой ω_0 . Как правило, к уравнению вида (2) приводятся уравнения, основанные на основе закона сохранения энергии.

1. Рассмотрите горизонтальные колебания пружинного маятника: представляющего собой груз массы m , прикрепленный с помощью легкой пружины жесткостью k к вертикальной стене. Считайте, что в начальный момент времени груз сместили на некоторое расстояние x_0 от его положения равновесия.

1.1 Пренебрегая трением, запишите уравнение закона сохранения механической энергии для груза.

1.2 Приведите полученное уравнение к виду (2). На основании его запишите формулу для периода колебаний груза.

Во многих случаях уравнение вида (2) не следует автоматически из уравнения закона сохранения энергии. Но при рассмотрении малых колебаний (когда величина x , и скорость ее изменения v малы) из уравнения закона сохранения энергии можно получить уравнение вида (2). Для этого следует упростить выражения для кинетической и потенциальной энергии, пренебрегая малыми величинами порядка выше второго (то есть $x^3, v^3, x^4, v^4, x^2 \cdot v^2$, и т.д.)

2. Рассмотрите малые колебания математического маятника, представляющего собой груз некоторой массы, подвешенный на легкой нерастяжимой нити длиной l в однородном поле тяжести земли. В качестве координаты используйте α - угол отклонения нити маятника от вертикали.

2.1 Пренебрегая сопротивлением воздуха, запишите уравнение закона сохранения механической энергии для груза (в качестве координаты используйте угол отклонения).

2.2 Считая угол отклонения α малым, приведите полученное уравнение к виду (2). На основании его запишите формулу для периода колебаний маятника.

Подсказка: при малых углах α справедлива приближенная формула

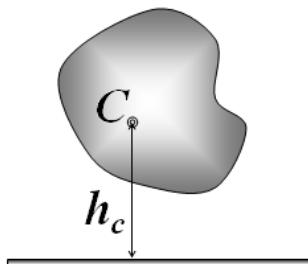
$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}. \quad (3)$$

При описании движения твердого тела, которое не может считаться материальной точкой, выражения для кинетической и потенциальной энергий тела усложняются.

3.1 Покажите, что потенциальная энергия твердого тела, находящегося в поле тяжести Земли определяется простой формулой

$$U = mgh_C, \quad (3)$$

где h_C – высота центра масс тела, g – ускорение свободного падения.



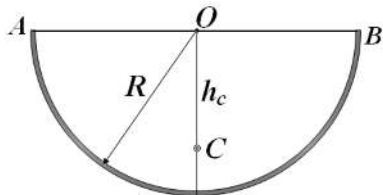
Часть 2. Колебания полукольца.

Из тонкостенной трубы радиуса R вырезали полукольцо. Его края соединили легкой проволокой AB . Изгибом проволоки и ее массой следует пренебрегать.

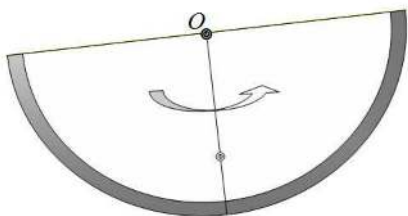
4.1 Покажите, что центр масс C полукольца находится на расстоянии

$$h_C = \frac{2}{\pi}R \quad (5)$$

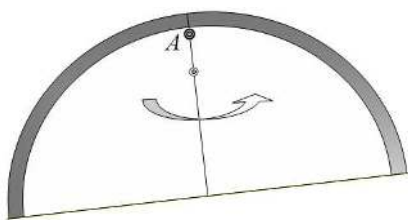
от его центра O .



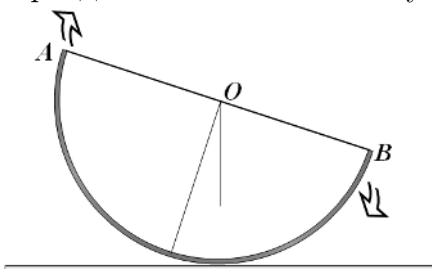
4.2 Полукольцо подвесили на горизонтальной оси, проходящей через точку O (центр полукольца). Определите период малых колебаний полукольца при таком подвесе.



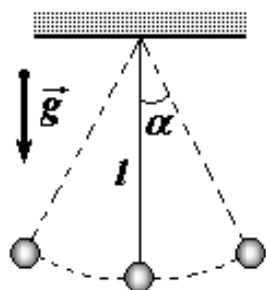
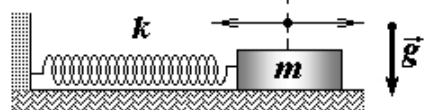
4.3 Полукольцо подвесили на горизонтальной оси, проходящей через точку A (вершину полукольца), отклонили на малый угол от положения равновесия и отпустили. Определите период колебаний в этом случае.



4.4 Полукольцо поставили на шероховатую поверхность и вывели из положения равновесия. Полукольцо начало колебаться, качаясь по поверхности без проскальзывания. Определите период таких колебаний полукольца. Колебания считайте малыми.



Подсказка. Получите выражение для кинетической энергии кольца в момент времени, когда ось симметрии кольца вертикальна. При малых колебаниях это выражение будет справедливо и при малых отклонениях от вертикали.



Решение

Задача 2 «Полукольцо»

1.1 Закон сохранения механической энергии при движении груза по горизонтальной поверхности имеет вид

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \quad (1)$$

где v — значение мгновенной скорости движения груза, а x — значение абсолютной деформации пружины (смещение груза от положения равновесия).

1.2 Разделив обе части (1) на массу груза m , получим

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{m} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{E}{m} = \text{const}. \quad (2)$$

Из (2) следует, что для горизонтального пружинного маятника

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Соответственно, период таких колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3)$$

2.1 При рассмотрении математического маятника удобно ввести в качестве координаты угол α его отклонения от вертикали. Тогда кинетическая энергия движения материальной точки может быть представлена в виде

$$E^K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 R^2}{2},$$

где ω — угловая скорость вращения математического маятника, а радиус окружности равен длине его подвеса $R = l$.

При отклонении маятника на угол α от вертикали его потенциальная энергия возрастет на величину

$$E^П = mgh = mgl(1 - \cos \alpha).$$

2.2 Используя приведенное в условии соотношение для малых колебаний математического маятника, получим

$$E^П = mgl\frac{\alpha^2}{2}.$$

Теперь уравнения закона сохранения энергии принимает вид

$$E = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{k\alpha^2}{2} = \text{const}, \quad (4)$$

где $k = \frac{mg}{l}$.

Преобразовывая выражение (4) к уравнению гармонических колебаний, получаем

$$\frac{\omega^2}{2} + \frac{k}{m} \cdot \frac{\alpha^2}{2} = \frac{E}{mR^2} = \text{const}.$$

Соответственно, для периода колебаний математического маятника получаем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5)$$

3.1 Мысленно разобьем тело на тонкие горизонтальные слои толщиной Δz . Массу каждого слоя обозначим Δm_i , а его высоту z_i . Тогда потенциальная энергия всего тела может быть представлена в виде суммы

$$U = \sum_i \Delta m_i g z_i = g \sum_i \Delta m_i z_i.$$

Сумма стоящая в этом выражении определяет положение центра масс

$$\sum_i \Delta m_i z_i = mh_c.$$

Откуда и следует требуемое выражение для потенциальной энергии тела.

4.1 Мысленно разобьем кольцо на малые участки, видимые из центра кольца под малым углом $\Delta\varphi$. Рассмотрим на кольце малый участок AB , положение которого задается углом φ от вертикали. Длина этого участка кольца равна $\Delta l = |AB| = R\Delta\varphi$, а масса (учитывая, что вся масса m равномерно распределена в пределах угла $\varphi \in [-\pi/2, +\pi/2]$) $\Delta m = \frac{m}{\pi}\Delta\varphi$. Вертикальная координата (отсчитываемая от центра кольца O) выделенного участка равна $z = R \cos \varphi$. Теперь можно записать выражение для определения координаты h_C центра масс кольца

$$mh_C = \sum_i \Delta m_i z_i, \quad (6)$$

где суммирование ведется по всем элементам кольца. Подставим полученные выше выражения для параметров отдельных элементов кольца

$$mh_C = \sum_i \Delta m_i z_i = \sum_i \frac{m}{\pi} \Delta\varphi_i \cdot R \cos \varphi_i = \frac{m}{\pi} \sum_i \Delta\varphi_i \cdot R \cos \varphi_i = \frac{m}{\pi} \sum_i \Delta l_i \cos \varphi_i, \quad (7)$$

Полученная сумма легко вычисляется, если обратить внимание, что $\Delta l_i \cos \varphi_i = |A'B'|$, то есть равна длине проекции выделенного отрезка на горизонтальное направление, сумма этих длин проекций равна длине отрезка CD , очевидно, равной диаметру кольца. Таким образом получаем

$$mh_C = \frac{m}{\pi} \sum_i \Delta l_i \cos \varphi_i = \frac{m}{\pi} \cdot 2R, \quad (8)$$

Откуда и следует искомое выражение

$$h_C = \frac{2}{\pi} R, \quad (9)$$

Альтернативный вариант 1.

Повернем полукольцо на малый угол $\Delta\alpha$. При этом его потенциальная энергия увеличится (за счет того, что отрезок $A'B'$ «переместился» в положение AB)

$$\Delta U = \Delta mg \cdot \Delta h = \frac{m}{\pi} \Delta\alpha \cdot R \Delta\alpha \quad (1)$$

С другой стороны это же изменение

потенциальной энергии можно выразить через изменение высоты центра масс

$$\Delta U = mg(h_C - h_C \cos \Delta\alpha) \approx mgh_C \frac{(\Delta\alpha)^2}{2},$$

на последнем шаге использовалась приближенная формула для косинуса малого угла. Приравнявая полученные выражения для изменения потенциальной энергии, получим требуемую формулу для центра масс.

Альтернативный вариант 2.

Подвесим к краю полукольца груз малой массы m_1 . Рассмотрим моменты сил, действующих на систему в состоянии равновесия, относительно оси, проходящей через точку касания полукольца и плоскости (точку C). При малом угле α момент веса груза

$$M_1 = mgR \cos \alpha \approx mgR$$

Момент силы тяжести полукольца можно записать двумя способами: через смещение центра масс полукольца

$$M_2 = mgh_C \sin \alpha \approx mgh_C \alpha$$

или как момент веса некомпенсированной части АВ полукольца

$$M_2 \approx \frac{2\alpha}{\pi} mgh_C$$

Приравнивая между собой выражения для M_2 , найдем искомое расстояние r от точки O до центра масс полукольца.

Возможны и другие варианты решения.

4.2 При колебаниях полукольца вокруг его центра O все его точки движутся с одинаковыми скоростями $v = \omega R$, где $\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$ - угловая скорость вращения кольца, α - угол отклонения в данный момент времени. Поэтому кинетическая энергия кольца выражается формулой

$$E^K = \frac{m\omega^2 R^2}{2} \quad (10)$$

Изменение потенциальной энергии кольца при отклонении на малый угол α равно

$$\Delta U = mgh_C(1 - \cos \alpha) \approx mgh_C \frac{\alpha^2}{2}. \quad (11)$$

Используя формулы (10)-(11), запишем уравнения закона сохранения механической энергии

$$\frac{m\omega^2 R^2}{2} + mgh_C \frac{\alpha^2}{2} = E = const \quad (12)$$

из которого следует уравнение гармонических колебаний

$$\omega^2 + \frac{gh_C}{R^2} \alpha^2 = const, \quad (13)$$

Период которых равен

¹ При малом угле ($\alpha \rightarrow 0$) с одинаковой точностью справедливы равенства $\sin \alpha \approx \alpha$; $\cos \alpha \approx 1$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^2}{gh_C}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^2}{g \frac{2}{\pi} R}} = 2\pi \sqrt{\frac{\pi R}{2g}}.$$

Возможны и другие варианты решения (например, используя формулу для колебаний физического маятника и выражение для момента инерции полукольца).

4.3 В этом случае разные части полукольца будут иметь разные линейные скорости, но одинаковую угловую скорость $\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$ (α - угол отклонения в данный момент времени). Поэтому для вычисления кинетической энергии необходимо его разбивать на малые участки. Рассмотрим один из таких участков, видимый из центра под малым углом $\Delta \varphi$, и отстоящий от оси симметрии полукольца на угол φ . Модуль его линейной скорости равен $V_i = \omega r_i$, где r_i - расстояние от выделенного участка кольца до оси вращения ВА. Квадрат этого расстояния можно выразить по теореме косинусов для треугольника OAB

$$r_i^2 = 2R^2(1 - \cos \varphi_i). \quad (15)$$

Подсчитаем кинетическую энергию кольца, как сумму энергий всех его малых частей

$$\begin{aligned} E^K &= \sum_i \frac{\Delta m_i V_i^2}{2} = \sum_i \frac{1}{2} \frac{m}{\pi} \Delta \varphi_i \cdot (r_i \omega)^2 = \frac{m \omega^2}{2\pi} \sum_i 2R^2 (1 - \cos \varphi_i) \Delta \varphi_i = \\ &= \frac{m \omega^2}{\pi} \left(R^2 \sum_i \Delta \varphi_i - R \sum_i R \cos \varphi_i \Delta \varphi_i \right) \end{aligned}$$

Первая сумма в этом выражении равна π , вторую мы вычисляли при расчете положения центра масс, она равна $2R$. Поэтому выражение для кинетической энергии полукольца имеет вид

$$E^K = \frac{m \omega^2}{\pi} \left(R^2 \sum_i \Delta \varphi_i + R \sum_i R \cos \varphi_i \Delta \varphi_i \right) = \frac{m \omega^2 R^2}{\pi} (\pi - 2) = m \omega^2 R^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \quad (16)$$

Не сложно получить и выражение для потенциальной энергии кольца при его отклонении на малый угол α . Для этого достаточно в формуле (11) заменить h_C на расстояние от оси вращения до центра масс в этом «перевернутом» случае ($h_C \rightarrow R - h_C$)

$$\Delta U = mg(R - h_C)(1 - \cos \alpha) \approx mg(R - h_C) \frac{\alpha^2}{2} = mgR \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \frac{\alpha^2}{2}. \quad (17)$$

Теперь мы можем записать уравнение закона сохранения энергии при движении кольца

$$m \omega^2 R^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) + mgR \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \frac{\alpha^2}{2} = E \quad (18)$$

и привести его к виду уравнения гармонических колебаний

$$\omega^2 + \frac{g}{2R} \alpha^2 = \text{const}. \quad (19)$$

Из этого уравнения определяем период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{2 \frac{R}{g}}. \quad (20)$$

Возможны и другие варианты решения (например, используя формулу для колебаний физического маятника и выражение для момента инерции полукольца).

4.4 Расчет кинетической энергии в данном случае ничем не отличается от проведенного в предыдущем разделе 4.3, потому, что в указанном в подсказке положении мгновенным центром вращения является вершина полукольца. Поэтому можно воспользоваться формулой (16).

$$E^K = m \omega^2 R^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \quad (21)$$

А для определения изменения потенциальной энергии можно воспользоваться соответствующей формулой (11) из пункта 4.2, потому, что в обоих случаях высота центра полукольца остается неизменной, поэтому

$$\Delta U = mgh_C \frac{\alpha^2}{2} = mgR \frac{2}{\pi} \frac{\alpha^2}{2} = mgR \frac{\alpha^2}{\pi}. \quad (22)$$

Дальнейший путь решения уже изъезжен нами. Записываем закон сохранения энергии

$$m\omega^2 R^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + mgR \frac{\alpha^2}{\pi} = E, \quad (23)$$

приводим его к виду уравнения гармонических колебаний

$$\omega^2 + \frac{g}{(\pi - 2)R} \alpha^2 = \text{const}, \quad (24)$$

Записываем формулу для периода колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{(\pi - 2) \frac{R}{g}}. \quad (25)$$

***Возможны и другие варианты решения (например, используя формулу для колебаний физического маятника и выражение для момента инерции полукольца).

