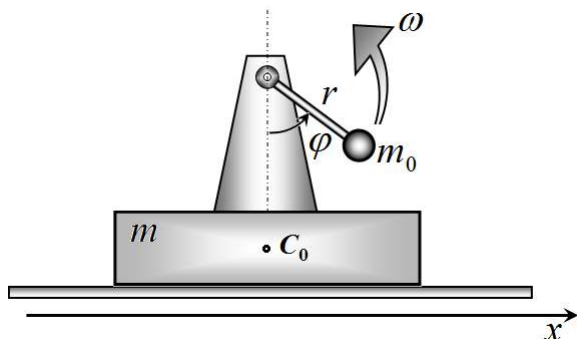


Эксцентричная машинка

Условие

Задача 10.3 «Эксцентричная машинка»

На платформе с подставкой расположен электродвигатель (с источником). Полная масса платформы с подставкой и двигателем равна m , центр масс C_0 расположен посередине платформы. К валу двигателя прикреплен эксцентрик, представляющий собой жесткий невесомый стержень длиной r , к концу которого жестко прикреплен небольшой шарик массы m_0 . Обозначим отношение массы шарика к массе всей платформы $\eta = \frac{m_0}{m}$. Двигатель вращает стержень с постоянной угловой скоростью ω . Вся система расположена на горизонтальной поверхности. Положительное направление вращения эксцентрика и положительное направление оси Ox указаны на рисунке. Положение стержня определяется углом его отклонения от вертикали φ .



1 Найдите проекции скорости и ускорения центра масс всей системы на горизонтальную и вертикальную оси координат в зависимости от угла отклонения φ .

2 Пусть платформа закреплена между упорами на горизонтальной поверхности так, что не может двигаться горизонтально, но может «подпрыгивать» вверх. Определите, при какой минимальной угловой скорости вращения стержня ω_0 платформа будет отрываться от горизонтальной поверхности.

3. Пусть теперь платформа может скользить по горизонтальной поверхности без трения. Стержень вращается с постоянной скоростью ω , которая меньше, чем величина ω_0 , найденная в предыдущем пункте. Сначала платформу удерживают, а затем отпускают. Определите закон движения центра платформы C_0 , если в момент ее отпускания

3.1 Стержень располагался горизонтально;

3.2 Шарик находился в нижней точке.

Постройте примерные графики законов движения в этих двух случаях.

4. Рассмотрите теперь случай, когда между платформой и горизонтальной поверхностью присутствует сила сухого трения, коэффициент трения равен μ ($\mu < 1$)

4.1 При какой минимальной угловой скорости вращения ω_1 стержня платформа сможет сдвинуться с места? В какую сторону произойдет этот сдвиг? Чему равен угол φ в момент начала движения?

4.2 Пусть $\mu = 0,35$, $\eta = \frac{m_0}{m} = 0,20$, длина стержня $r = 1,0$ м. Найдите численное значение угловой скорости ω_1 .

5. Пусть угловая скорость вращения стержня равна $1,02\omega_1$. Найдите среднюю скорость горизонтального движения платформы. Используйте численные данные, приведенные в пункте 4.

Решение

1. Координаты (x_C, y_C) центра масс системы, состоящей из двух тел, определяются по фор-

мулам

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

где m_1, m_2 - массы тел, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) - координаты их центров масс. Свяжем систему отсчета с центром масс платформы C_0 . В этой системе отсчета координаты центра масс рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{m_0 r \sin \varphi}{m + m_0}, \\ y_C &= \frac{h - m_0 r \cos \varphi}{m + m_0}, \end{aligned} \quad (1)$$

где h высота точки подвеса (несущественная для дальнейшего). Вектор скорости движения шарика направлен перпендикулярно стержню и по модулю равен $v_0 = r\omega$. Проекции скорости центра масс системы определяются по формулам аналогичным (1). В рассматриваемом случае они равны

$$\begin{aligned} v_{xc} &= \frac{m_0 r \omega \cos \varphi}{m + m_0}, \\ v_{yc} &= \frac{m_0 r \omega \sin \varphi}{m + m_0}, \end{aligned} \quad (2)$$

Ускорение шарика является центростремительным, поэтому направлено к оси вращения, равным по модулю $a_0 = r\omega^2$. Так же не сложно спроецировать это ускорение на оси координат и найти тем самым ускорение центра масс системы:

$$\begin{aligned} a_{xc} &= -\frac{m_0 r \omega^2 \sin \varphi}{m + m_0}, \\ a_{yc} &= \frac{m_0 r \omega^2 \cos \varphi}{m + m_0}, \end{aligned} \quad (3)$$

2. Эту задачу проще всего решать, используя известное обобщение уравнения второго закона Ньютона для произвольной системы:

$$m \vec{a}_C = \vec{F}_{\text{вн.}}, \quad (4)$$

произведение массы всей системы на ускорения центра масс равно сумме внешних сил, действующих на систему (иными словами – внутренние силы не могут изменить скорость центра масс). В рассматриваемой задаче внешними силами, действующими на систему, являются: $(m + m_0)\vec{g}$ - сила тяжести, $\vec{N}_0$ - сила реакции горизонтальной поверхности, $\vec{F}$ - силы реакции опор, удерживающих платформу.

В проекции на вертикальную ось уравнение (4) будет иметь вид (пока сама платформа неподвижна):

$$(m + m_0)a_{yc} = N_0 - (m + m_0)g. \quad (5)$$

Платформа начнет попрыгивать, когда нормальная реакция обратится в нуль $N_0 = 0$. Выражая из уравнения (5) модуль этой силы и используя выражения (3), получим

$$N_0 = (m + m_0)g + (m + m_0)a_{yc} = (m + m_0)g + m_0 r \omega^2 \cos \varphi = 0 \quad (6)$$

Минимальная угловая скорость ω_0 , при которой возможно выполнения условия отрыва (6), соответствует углу отрыва, при котором $\cos \varphi = -1$, т.е. когда стержень расположен вертикально. В этом случае из уравнения (6) находим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(m + m_0)g}{m_0 r}} \quad (7)$$

Дополнение (альтернативный вариант).

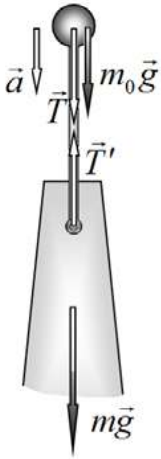
Данный пункт задачи допускает и более традиционное решение. При минимальной угловой скорости отрыв произойдет, когда шарик находится в верхней точке. В этом случае сила реакции стержня T определяется из уравнения второго закона Ньютона для шарика

$$m_0 r \omega^2 = m_0 g + T.$$

Отрыв платформы от горизонтальной поверхности произойдет, если эта сила превысит силу тяжести платформы:

$$T > mg.$$

Из этих двух условий следует выражение (7) для минимальной угловой скорости, при которой платформа начнет отрываться от поверхности.

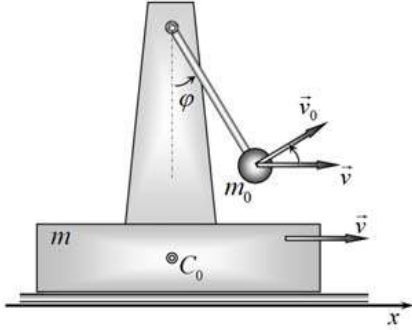


3. Рассмотрим движение платформы в инерциальной системе отсчета, связанной с неподвижной горизонтальной поверхностью. Обозначим¹ скорость платформы $\vec{v}$. В этой системе отсчета движение шарика является «составным»: равномерное вращение вокруг оси и поступательное движение вместе с платформой. Так как в данном случае нет внешних сил, имеющих горизонтальные составляющие, то ускорение центра масс всей системы должно быть равно нулю! Следовательно, скорость центра масс системы должна оставаться неизменной и определяться начальным условием – скоростью центра масс в момент отпускания платформы. Для определения скорости центра масс всей системы необходимо к найденной скорости центра масс, в системе отсчета, связанной с платформой прибавить скорость движения платформы

$$v_{xc} = \frac{m_0 r \omega \cos \varphi}{m + m_0} + v = \text{const.} \quad (8)$$

Заметим, что скорость центра масс может быть найдена и непосредственно из закона сложения скоростей

$$v_{xc} = \frac{m_0(v + r\omega \cos \varphi) + mv}{m + m_0} \quad (8^*)$$



¹ Заранее не очевидно, куда будет направлена эта скорость. Поэтому на рисунке мы направили ее в положительном направлении оси Ox , а дальше уравнения «покажут» куда она направлена на самом деле!

3.1 Константа в выражении (8) определяется скоростью центра масс в момент времени, когда отпустили платформу. Если платформу отпустили в тот момент, когда шарик находился в нижней точке, то горизонтальная составляющая скорости равна $v_0 = r\omega$, а скорость платформы равна нулю. Следовательно, скорость центра масс в этот момент времени (она же константа в выражении (8)) равна

$$v_{xc0} = \frac{m_0 r \omega}{m + m_0}.$$

Подставляя это значение в уравнение (8), находим из него зависимость скорости платформы от времени (с учетом того, что $\varphi = \omega t$)

$$\frac{m_0 r \omega \cos \varphi}{m + m_0} + v = \frac{m_0 r \omega}{m + m_0} \Rightarrow v = \frac{m_0 r \omega}{m + m_0} (1 - \cos \omega t). \quad (9)$$

Чтобы записать закон движения платформы, обратим внимание, что выражение для ее скорости содержит две составляющих: одну постоянную $\frac{m_0 r \omega}{m + m_0}$, вторую переменную $-\frac{m_0 r \omega}{m + m_0} \cos \omega t$, которая изменяется по тому же закону, что и скорость центра масс в системе отсчета, связанной с платформой (2), только с противоположным знаком! Первая составляющая описывает равномерное движение, вторая описывается тем же законом, что и координата центра масс x_C (1), только с противоположным знаком. Таким образом, закон движения платформы может быть записан в виде

$$x(t) = \frac{m_0 r \omega}{m + m_0} t - \frac{m_0 r}{m + m_0} \sin \omega t = \frac{m_0 r}{m + m_0} (\omega t - \sin \omega t). \quad (10)$$

Строго говоря, в этом выражении следует добавить начальную координату x_0 , однако, совместив начало отсчета оси Ox с начальным положением платформы, мы эту постоянную делаем равным нулю.

3.2 Если платформу отпустили, когда стержень располагался горизонтально, то в этот момент времени горизонтальная проекция скорости шарика равна нулю, следовательно, и скорость центра масс всей системы также равна нулю. Поэтому в этом случае из уравнения (8) следует, что скорость платформы равна

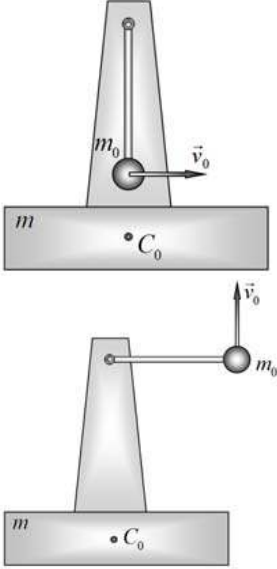
$$\frac{m_0 r \omega \cos \varphi}{m + m_0} + v = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{m_0 r \omega \cos \varphi}{m + m_0}. \quad (11)$$

Следовательно, зависимость координаты от угла поворота в данном случае имеет вид

$$x(\varphi) = x_0 - \frac{m_0 r}{m + m_0} \sin \varphi. \quad (12)$$

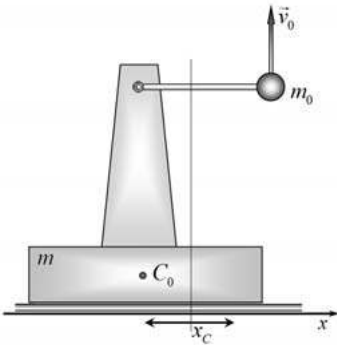
Учтем, что при $t = 0$ $\varphi = \pi/2$, и запишем зависимость координаты от времени в виде

$$x(t) = x_0 - \frac{m_0 r}{m + m_0} \sin(\omega t + \pi/2) = x_0 - \frac{m_0 r}{m + m_0} \cos \omega t. \quad (13)$$



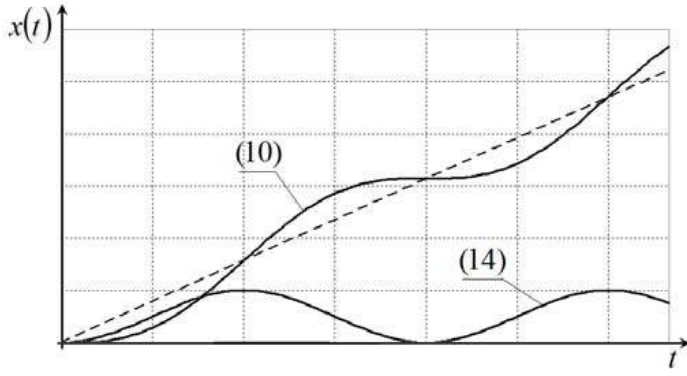
Наконец, полагая, что при $t = 0$ $x = 0$, находим $x_0 = \frac{m_0 r}{m + m_0}$ и получаем окончательный вид закона движения

$$x(t) = \frac{m_0 r}{m + m_0} (1 - \cos \omega t). \quad (14)$$



Полученное выражение легко объяснимо – платформа движется так, что положение центра масс всей системы x_C остается неизменным.

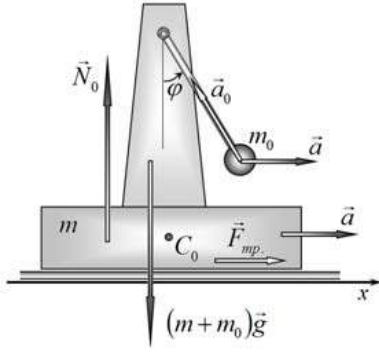
Схематические графики полученных законов движения (10) и (14) показаны на рисунке. Видно их принципиальное различие в одном случае платформа колеблется вокруг некоторого среднего положения, во втором – колебания накладываются на поступательное движение.



4. В этом случае также воспользуемся уравнением второго закона Ньютона для системы тел (4). В рассматриваемом в этом пункте задачи внешними силами, действующими на систему, являются: $(m + m_0)\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{N}_0$ – сила реакции горизонтальной поверхности, $\vec{F}_{\text{тр.}}$ – сила трения, действующая на платформу со стороны горизонтальной поверхности.

Для определения условий начала скольжения запишем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси для покоящейся платформы:

$$\begin{aligned} (m + m_0)a_{yc} &= N_0 - (m + m_0)g \\ (m + m_0)a_{xc} &= F_{\text{тр.}} \end{aligned} \quad (15)$$



Подставим выражения для ускорения центра масс:

$$\begin{aligned} m_0 r \omega^2 \cos \varphi &= N_0 - (m + m_0)g \\ -m_0 r \omega^2 \sin \varphi &= F_{\text{тр.}} \end{aligned} \quad (16)$$

В этих уравнениях $F_{\text{тр.}}$ – сила трения покоя, платформа не будет проскальзывать, если модуль силы трения не достигнет своего максимального значения, то есть при выполнении условия

$$|F_{\text{тр.}}| < \mu N_0. \quad (17)$$

Выразим из уравнений (16) значение силы реакции и подставим их в неравенство (17)

$$\begin{cases} F_{\text{тр.}} = -m_0 r \omega^2 \sin \varphi \\ N_0 = (m + m_0)g + m_0 r \omega^2 \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow |\sin \varphi| < \mu \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \cos \varphi \right) \quad (18)$$

где $\omega_0^2 = \frac{(m+m_0)g}{m_0 r}$ – частота, при которой происходит отрыв от горизонтальной поверхности, найденная ранее в п. 2.

Схематически построим графики функций (рис. 10), входящих в неравенство (18). Из этих графиков следует, что при постепенном увеличении угловой скорости произойдет в интервале

углов $\varphi \in [\pi/2, \pi]$, где синус угла положителен. Поэтому для определения угла, при котором произойдет срыв необходимо решить уравнение

$$\sin \varphi = \mu \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \cos \varphi \right). \quad (19)$$

Для его решения проведем известные преобразования

$$\begin{aligned} \sin \varphi - \mu \cos \varphi &= \sqrt{1 + \mu^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \sin \varphi - \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \cos \varphi \right) = \\ &= \sqrt{1 + \mu^2} \sin(\varphi - \beta) \end{aligned}$$

где $\beta = \arctg \mu$. Теперь это уравнение преобразуется к простейшему виду

$$\sin(\varphi - \beta) = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (20)$$

Минимальное значение угловой скорости вращения стержня, при которой начнется горизонтальное движение платформы, определяется условием

$$\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 \quad \omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}}. \quad (21)$$

При этом угол, при котором произойдет срыв, оказывается равным

$$\sin(\varphi - \beta) = 1 \quad \varphi^* = \frac{\pi}{2} + \beta = \frac{\pi}{2} + \arctg \mu. \quad (22)$$

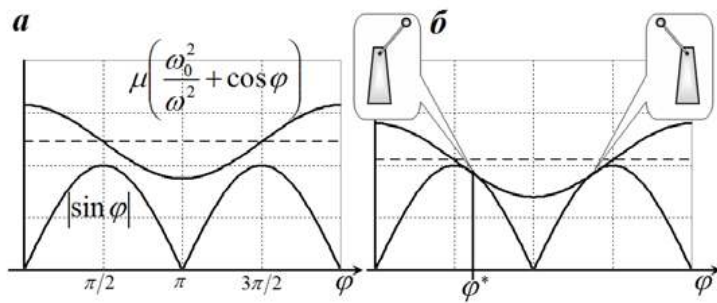
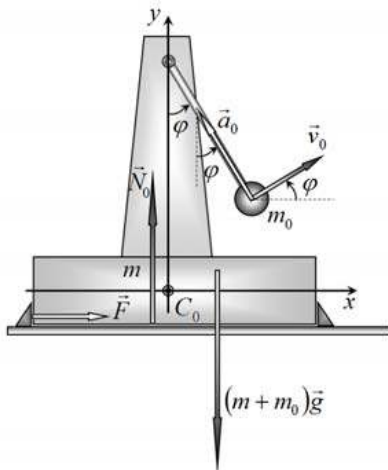
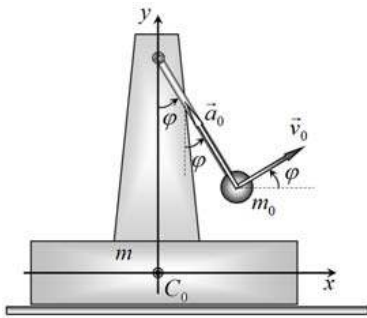
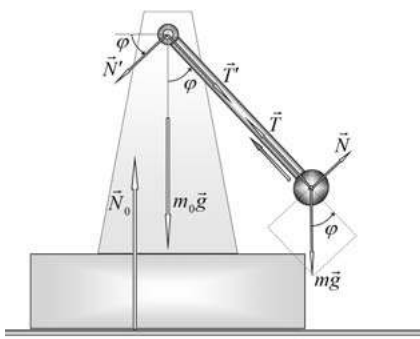
Подставляя численные значения параметров, вычислим минимальную скорость

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 \sqrt{\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}} = \sqrt{\frac{(m + m_0)g}{m_0 r} \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}} = \sqrt{\frac{(1 + \eta)g}{\eta r} \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{(1 + 0,20) \cdot 9,8}{0,20 \cdot 1,0} \frac{0,35}{\sqrt{1 + 0,35^2}}} \approx 4,4 \text{ c}^{-1} \end{aligned} \quad (23)$$

5. Из рисунка 10б следует что, при малом превышении скорости ω_1 , за один оборот срыв будет происходить дважды – один раз в одну сторону, другой раз в другую (при прочих равных условиях), поэтому средняя скорость движения платформы будет равна нулю.

Последнее замечание.

Задача может решаться и более традиционным способом, рассматривая силы, возникающие в стержне и действующие на ось и на шарик. Только следует учитывать, что при ускоренном движении платформы и при раскручивании шарика помимо продольных, будут присутствовать и поперечные силы (см. рис. 11).



¹ Заранее не очевидно, куда будет направлена эта скорость. Поэтому на рисунке мы направили ее в положительном направлении оси Ox , а дальше уравнения «покажут» куда она направлена на самом деле!