

## Условие

### Задача 11.3 Испарение воды

В данной задаче вам необходимо оценить скорость испарения воды.

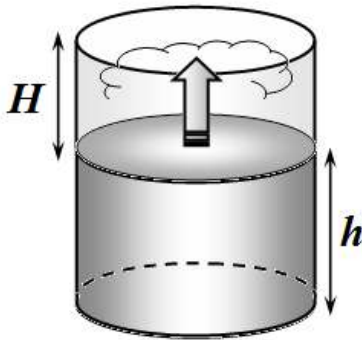
Используйте следующие характеристики воды и водяного пара:

- молярная масса  $M = 18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ ;
- плотность воды  $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ;
- универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ ; постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ ;
- атмосферное давление считать постоянным и равным  $P_0 = 1,0 \cdot 10^5$  Па температуру воздуха и воды во всех пунктах задачи также считать постоянной и равной  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ ;
- давление насыщенного пара при данной температуре равно  $p_n = 2,3$  кПа;
- при попадании молекул воды из пара на свободную поверхность жидкости только  $\eta = 4,0\%$  молекул задерживаются ею, остальные отражаются;
- коэффициент диффузии молекул воды в воздухе при заданных условиях равен  $D = 3,1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ ;
- абсолютный нуль температуры  $t_0 = -273,15^\circ\text{C}$ .

1. Покажите, что число молекул газа, ударяющихся о площадку единичной площади за единицу времени, пропорционально концентрации молекул и средней скорости их движения. Получите формулу для расчета числа ударов молекул газа.

2. В вертикальном открытом цилиндрическом сосуде находится вода при заданных условиях.

2.1 Определите число молекул воды, вылетающих с единицы площади свободной поверхности в единицу времени. 2.2 Считая, что все молекулы воды, вылетевшие с ее поверхности, назад не возвращаются, рассчитайте скорость высыхания воды в сосуде, т.е. скорость изменения высоты ее уровня  $\frac{\Delta h}{\Delta t}$  (Получите формулу и найдите численное значение, выразив его в  $\frac{\text{м}}{\text{час}}$ )



3. Скорее всего, полученная в предыдущем пункте оценка скорости высыхания сильно завышена. Уточните ее, считая, что над водой находится воздух, влажность которого равна  $\varphi = 70\%$ .

4. Скорее всего, что новая оценка также завышена! Поэтому учтите влияние диффузии водяного пара в сосуде на скорость испарения. Пусть высота свободной части сосуда над поверхностью воды равна  $H = 10$  см. В сосуде установится некоторое стационарное распределение концентрации молекул водяного пара по высоте (влиянием боковых стенок можно пренебречь и считать, что концентрация молекул пара зависит только от высоты). Вне сосуда (то есть на высоте  $H = 10$  см над поверхностью воды) находится воздух, влажность которого равна  $\varphi = 70\%$ . Обозначим влажность воздуха, непосредственно примыкающего к поверхности воды  $\varphi_0$ . 4.1 Найдите зависимость влажности воздуха от расстояния до свободной поверхности воды. 4.2 Рассчитайте количество молекул воздуха, покидающих сосуд в единицу времени (величины граничных влажностей  $\varphi, \varphi_0$  и площадь поперечного сечения сосуда считайте известными). 4.3 Найдите влажность воздуха, непосредственно примыкаю-

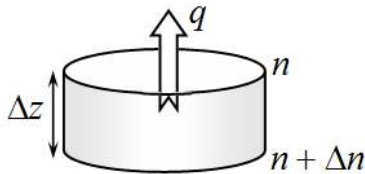
щего в свободной поверхности воды  $\varphi_0$ . 4.4 Рассчитайте скорость высыхания воды с учетом вертикальной диффузии молекул воды.

#### **Теоретическая подсказка.**

*Диффузионный поток (число молекул пересекающих площадку единичной площади в единицу времени) определяется законом Фика*

$$q = D \frac{\Delta n}{\Delta z},$$

где  $\Delta n$  - изменение концентрации молекул диффундирующих молекул на расстоянии  $\Delta z$ ,  $D$  - коэффициент диффузии.



#### **Решение**

##### **Задача 11.3 Испарение воды**

1. Формулу для числа ударов молекул о стенку можно получить различными способами. Например, за время  $\Delta t$  до стенки долетят и ударятся о нее те молекулы, которые находятся на расстоянии меньшем  $v_x \Delta t$ , где  $v_x$  - проекция скорости молекулы на направление, перпендикулярное стенке. Если площадь рассматриваемой стенки равна  $\Delta S$ , то число этих молекул равно (с учетом того, что половина молекул летит к стенке, а половина от нее)

$$\Delta N = \frac{1}{2} n |v_x| \Delta t \Delta S. \quad (1)$$

Далее необходимо провести усреднение по скоростям молекул. Корректный расчет приводит к результату

$$\nu = \frac{1}{4} n \langle v \rangle = \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8 RT}{\pi M}}. \quad (2)$$

*Комментарий.*

*Трудно ожидать, что учащиеся средней школы выведут точно эту формулу, поэтому при оценивании работы приемлемы и другие значения коэффициентов в формуле (2). Например, более традиционное «школьное» выражение*

$$\nu = \frac{1}{6} n v_{\text{ср.кв.}} = \frac{1}{6} n \sqrt{3 \frac{RT}{M}}. \quad (2^*)$$

*Численные значения коэффициентов равны  $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \approx 0,40$  в формуле (2);  $\frac{1}{6} \sqrt{3} \approx 0,29$ . Поэтому в численных расчетах погрешность в 30 % допустима.\**

2. Число вылетевших молекул можно найти, используя понятие насыщенного водяного пара. Если над поверхностью воды находится насыщенный водяной пар, то число молекул вылетающих с поверхности равно числу молекул, возвращающихся обратно. Число возвращающихся молекул равно числу молекул, ударяющихся о поверхность, умноженному на коэффициент  $\eta$  (доля молекул, задерживаемых водой). Поэтому, число вылетающих в единицу времени с единицы площади молекул равно

$$\nu_0 = \frac{1}{4}n\langle v \rangle \eta = \frac{1}{4}\eta n \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \frac{1}{4}\eta \frac{p_n}{kT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad (3)$$

где концентрация молекул насыщенного пара выражена из уравнения состояния  $n = \frac{p_n}{kT}$ . Масса всех молекул, вылетевших с единицы площади за промежуток времени  $\Delta t$  равна

$$\Delta m = \nu_0 m \Delta t, \quad (4)$$

где  $m = \frac{M}{R}$  — масса одной молекулы воды. С другой стороны эта же величина может быть выражена через объем испарившейся воды  $\Delta m = \rho \Delta h$ . Приравнивая эти два выражения, найдем скорость высыхания

$$\frac{1}{4}\eta \frac{p_n}{kT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \frac{M}{R} \Delta t = \rho \Delta h \Rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{1}{4}\eta \frac{p_n}{kT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \frac{1}{R\rho} = \eta \frac{p_n}{\rho} \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}}. \quad (5)$$

Подстановка численных значений приводит к результату

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_0 = \eta \frac{p_n}{\rho} \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} = 0,04 \frac{2,3 \cdot 10^3}{1,0 \cdot 10^3} \sqrt{\frac{18 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 8,31 \cdot 293}} \approx 1,0 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 0,36 \frac{\text{м}}{\text{час}} \quad (6)$$

Как и было сказано в условии, оценка слишком завышена — трудно согласиться с такой высокой скоростью испарения.

3. Так как над водой находится влажный воздух, то часть молекул воды, находящихся в воздухе, возвращается обратно в жидкость. Число этих молекул можно рассчитать по формуле (3), заменив в ней давление насыщенного пара на парциальное давление, которое равно  $p = \varphi p_n$  ( $\varphi$  — относительная влажность воздуха). Таким образом, скорость испарения будет определяться разностью чисел молекул, вылетающих из жидкости и возвращающихся обратно. Иными словами, полученную оценку (6) следует умножить на  $(1 - \varphi)$ :

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_1 = \eta \frac{p_n}{\rho} \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} (1 - \varphi) \approx 0,30 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 0,11 \frac{\text{м}}{\text{час}}. \quad (6)$$

4. В стационарном состоянии диффузионный поток должен быть равен потоку частиц, покидающих поверхность воды.

4.1 Так как диффузионный поток пропорционален величине  $\frac{\Delta n}{\Delta z}$  и постоянен по всей высоте сосуда, то концентрация молекул водяного пара должна убывать линейно с увеличением высоты над поверхностью сосуда. С учетом граничных условий, эта зависимость может быть записана в виде

$$n = n_0 - \frac{n_0 - n_1}{H} z. \quad (7)$$

Так как влажность воздуха при постоянной температуре пропорциональна концентрации, то аналогичное соотношение справедливо и для относительной влажности

$$\varphi(z) = \varphi_0 - \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{H} z. \quad (8)$$

где  $\varphi_1$  — относительная влажность на высоте  $H$

4.2 При заданных условиях диффузионный поток молекул воды определяется законом Фика, который приводит к выражению (с учетом  $n = \frac{p_H}{kT}\varphi$ )

$$q = DS \frac{p_H}{kT} \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{H} \quad (9)$$

4.3 С другой стороны этот же поток может быть выражен через число молекул воды вылетающих с поверхности жидкости

$$q = S\nu_0 (1 - \varphi_0),$$

где  $\nu_0$  - величина, определяемая формулой (3).

Приравнявая эти потоки, получим

$$D \frac{p_H}{kT} \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{H} = \nu_0 (1 - \varphi_0) \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\gamma \varphi_1 + 1}{\gamma + 1}$$

где обозначено  $\frac{D}{H\nu_0} \frac{p_H}{kT} = \gamma$ .

Найдем также величину

$$(1 - \varphi_0) = 1 - \varphi_0 = 1 - \frac{\gamma \varphi_1 + 1}{\gamma + 1} = \frac{\gamma}{1 + \gamma} (1 - \varphi_1).$$

Так как скорость испарения пропорциональна  $(1 - \varphi_0)$ , то расчета скорости испарения необходимо предыдущую оценку (6) умножить на коэффициент  $\frac{\gamma}{1+\gamma}$ . Рассчитаем численное значение параметра

$$\gamma = \frac{D}{H\nu_0} \frac{p_H}{kT} = \frac{4D}{H\eta \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{RT}{M}}} = \frac{4 \cdot 3,1 \cdot 10^{-5}}{0,1 \cdot 0,04 \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 293}{\pi \cdot 18 \cdot 10^{-3}}}} \approx 5,3 \cdot 10^{-5}.$$

Так как этот параметр чрезвычайно мал, то им можно пренебречь в знаменателе выражения (12).

В этом случае скорость высыхания оказывается равной

$$\left( \frac{\Delta h}{\Delta t} \right)_2 = \gamma \eta \frac{p_H}{\rho} \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} (1 - \varphi_1) \approx 1,6 \cdot 10^{-9} \frac{M}{c} \approx 0,14 \frac{MM}{сутки}.$$

Итак, основной вывод из решения данной задачи – скорость высыхания определяется не скоростью выхода молекул из жидкости, а скоростью диффузии водяного пара в окружающую среду!

*Заметим, что в данном случае скорость высыхания полностью определяется диффузионным потоком, а над поверхностью воды находится практически насыщенный пар. В этом прямая подстановка значения параметра  $\gamma$  в выражение для потока испаряющихся частиц дает*

$$\nu = (1 - \varphi_0) \nu_0 = \gamma (1 - \varphi_1) \nu_0 = D \frac{n_{Hac}}{H} (1 - \varphi_0).$$

Таким образом, этот поток равен диффузионному потоку, при условии, что над жидкостью находится насыщенный пар. С этой точки зрения можно провести и прямой расчет скорости высыхания

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = D \frac{n_{Hac}}{H} (1 - \varphi_0) \frac{M}{N_A} \frac{1}{\rho} = \frac{D}{H} \frac{p_H M}{RT} \frac{1}{\rho} (1 - \varphi_0) = \frac{3,1 \cdot 10^{-5} \cdot 2,3 \cdot 10^3 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 8,31 \cdot 293 \cdot 1 \cdot 10^3} \cdot 0,3 \approx$$

$$\approx 1,6 \cdot 10^{-9} \frac{M}{c} \approx 0,14 \frac{MM}{\text{сгмккu}}$$

