

## Условие

**Задача 3.** В чем причина появления поверхностной энергии?



В некоторых учебниках можно найти следующие рассуждения «молекулы на поверхности жидкости находятся в особых условиях, на них действует сила направленная внутрь жидкости. Благодаря этому приповерхностные слои оказываются сжатыми, а это приводит к увеличению суммарной энергии взаимодействия молекул. Эта избыточная положительная энергия и называется поверхностной энергией»

В данной задаче вам предлагается разобраться в истинных причинах возникновения поверхностной энергии.

### Часть 1. Описание взаимодействия двух молекул.

Рассмотрим одномерную модель – цепочку шариков (молекул), взаимодействующих между собой по закону, близкому к закону взаимодействия молекул.

Будем считать, что энергия взаимодействия двух молекул, находящихся на расстоянии  $r$  описывается функцией

$$U(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6}, \quad (1)$$

где  $a, b$  - известные постоянные величины. Потенциальная энергия принимается равной нулю при бесконечном расстоянии между молекулами.

**1.1** Покажите, что функцию (1) можно представить в виде

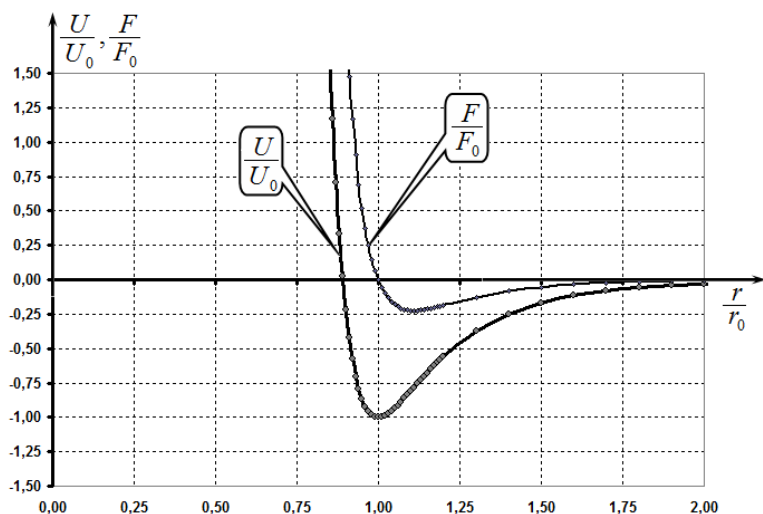
$$U(r) = U_0 \left( \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right), \quad (2)$$

где  $r_0$  - равновесное расстояние между молекулами,  $-U_0$  - минимальная энергия взаимодействия молекул.

Можно показать (*вам этого делать не надо!*), что такой энергии взаимодействия соответствует сила, определяемая формулой

$$F(r) = F_0 \left( \left( \frac{r_0}{r} \right)^{13} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^7 \right), \quad (3)$$

где  $F_0 = 12 \frac{U_0}{r_0}$ . Положительным направлением считается направление «наружу», то есть положительная сила соответствует отталкиванию молекул. На рисунке показаны графики функций (2) и (3) (*Может, пригодятся!*)



Приведенные функции сложны и делают решение задачи слишком громоздким. Однако, в реальных средах относительные изменения расстояний между молекулами по сравнению с равновесными малы, поэтому с высокой точностью эти функции можно приближенно заменить линейными.

Для упрощения математических выкладок рекомендуем воспользоваться следующей приближенной формулой

$$(1 + x)^\gamma \approx 1 + \gamma x,$$

справедливой при  $|x| \ll 1$  и любых (целых, дробных, положительных, отрицательных) степенях  $\gamma$ .

**1.2** Пусть расстояние между молекулами  $r$  мало отличается от равновесного  $r_0$ . Представим его в виде  $r = r_0 + r_0 \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - относительное изменение расстояния между молекулами, которое можно считать малым  $|\varepsilon| \ll 1$ . В общем случае, для расчета энергии и силы взаимодействия не только между ближайшими соседями удобно записать расстояние между молекулами в виде  $r = nr_0 + r_0 \delta$ , где  $\delta \ll 1$ . Тогда энергию и силу взаимодействия можно рассчитывать по приближенным формулам

$$U(\delta) = U_0 (u_n + s_n \delta)$$

$$F(\delta) = F_0 (f_n + c_n \delta)$$

Найдите численные значения коэффициентов  $u_n, s_n, f_n, c_n$  для функций (2) -(3) для  $n$  от 1 до 5 с точностью до 3 значащих цифр. Результаты расчетов представьте в таблице (она потом и вам поможет!)

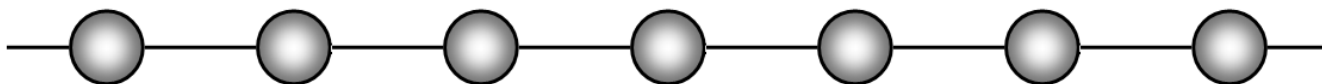
В дальнейшем рассчитывайте энергию в единицах  $U_0$ , а силу в единицах  $F_0$ , или что равносильно, считайте  $U_0 = 1, F_0 = 1$ .

Энергию, измеренную в этих единицах, будем обозначать  $w^{***}$ .

Также рекомендуем пользоваться приближенными формулами, за исключением расчета энергии взаимодействия ближайших соседей, т.е. при  $r = r_0 + r_0 \varepsilon$ .

Проводите промежуточные численные расчеты с точностью до трех значащих цифр!

**Часть 2. Бесконечная цепочка молекул.**



2.1 При каких расстояниях между молекулами цепочка может находиться в равновесии?

2.2 Как можно найти, какое расстояние между молекулами установится по прошествии достаточно большого промежутка времени?

Искать не надо, но скажите, как это можно сделать!

Ответ на этот вопрос -  $\varepsilon_0 = +1,40 \cdot 10^{-3}$

2.3 Оцените с точностью до  $10^{-3}$  потенциальную энергию  $w_0$ , приходящуюся на одну молекулу.

### Часть 3. Цепочка из трех молекул.

Выведем из цепочки три молекулы.



3.1. Найдите относительное изменение расстояния между молекулами  $\varepsilon$ .

3.2 Найдите изменение энергии взаимодействия между ближайшими молекулами  $\Delta w_{12}$  (по сравнению с этой энергией в бесконечной цепочке).

3.3 Найдите изменение энергии взаимодействия между крайними  $\Delta w_{13}$  (по сравнению с этой энергией в бесконечной цепочке).

3.4 Чему равно изменение полной потенциальной энергии трех «вырванных» молекул по сравнению с их полной энергией в бесконечной цепочке?

### Часть 4. Цепочка из пяти молекул.

Выведем из цепочки пять шариков.



4.1 Рассчитайте изменение энергии взаимодействия этих шариков между собой (по сравнению с этой энергией в бесконечной цепочке).

4.2 Чему равно изменение полной потенциальной энергии пяти «вырванных» молекул по сравнению с их полной энергией в бесконечной цепочке?

Вопрос последний.

Так в чем основная причина появления поверхностной энергии?

