

# Что? Где? Когда?

## Условие

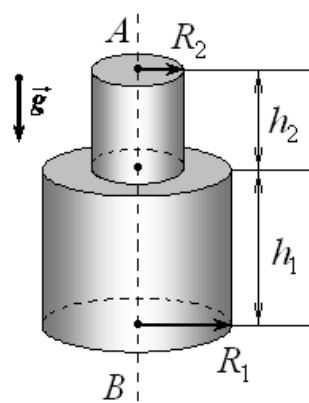
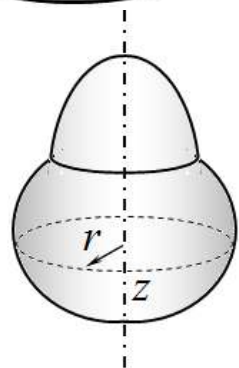
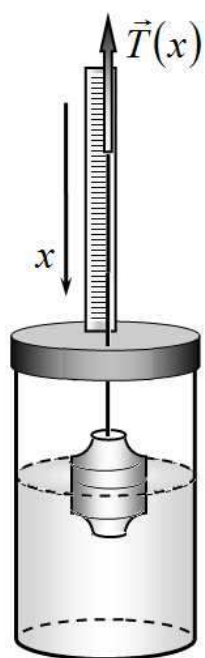
### Задача 1. Новые Архимеды.

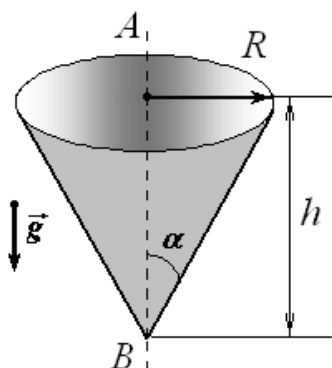
Молодой, но талантливый физик Федор (далее Федя), после просмотра программы «Что? Где? Когда?» решил сочинить собственный вопрос-задачу с черным ящиком – как, не заглядывая внутрь, определить что там находится. Идея пришла сразу – нужен «гидравлический черный ящик». Возьмем большую бочку, наполовину заполненную водой, и закроем ее крышкой с маленьким отверстием. Через отверстие пропустим прочную нить, к которой снизу прикрепим некоторое тело. Сверху с помощью чувствительного динамометра будем измерять силу натяжения нити, постепенно опуская и поднимая ее. Измеряя тем самым зависимость силы натяжения  $T(x)$  от координаты верхнего конца нити. Для ее измерения прикрепим к крышке бочки вертикальную линейку. Причем можно провести два измерения – при опускании и при подъеме тела! Можно ли по измеренной зависимости  $T(x)$  восстановить форму тела? Подумавши, Федя решил, что эта задача не имеет однозначного решения. Поэтому ввел дополнительное условие – тело должно быть осесимметричным! Уж в этом случае задача должна иметь решение при условии, что ось тела все время остается вертикальной. Тем более, что форма осесимметричного тела определяется одной функцией – зависимостью радиуса от высоты над низом тела  $r(z)$ .

Решено – сделано! Федор приступает к апробации своей идеи. Соединяет два сплошных металлических цилиндра, прикрепляет сверху прочную бечевку и ... решает провести сначала теоретические расчеты. Измеряет размеры:  $R_1 = 10,0$  см,  $R_2 = 5,0$  см,  $h_1 = 15$  см,  $h_2 = 10$  см, Измеряет массу  $m = 20$  кг. Далее рассчитывает (естественно полагая, что  $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ , а плотность воды равна  $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ) и строит график зависимости силы натяжения веревки от координаты верхней точки веревки.

**Вопрос 1.** Постройте график зависимости силы натяжения веревки от координаты верхней точки веревки. Считайте, что сила натяжения стала изменяться после того, как веревка опустилась до  $x_0 = 5,0$  см.

Проведя эксперимент, Федя убедился, экспериментальные данные в пределах погрешности совпали с результатами расчетов. «Может провести эксперимент, поднимая груз со дна?» – подумал Федя и тут же отбросил эту идею – ничего нового не получится!





Далее Федор решил усложнить задачу – больно уж простой получилась зависимость. Во втором эксперименте Федя использовал сплошной конус высотой  $h = 17$  см с углом полураскрытия  $\alpha = 20^\circ$ , измеренная масса конуса равна  $m = 7,5$  кг.

**Вопрос 2.** Постройте график зависимости силы натяжения нити  $T(x)$  от координаты  $x$  для этого эксперимента.

И этот эксперимент подтвердил проведенные расчеты. Вдохновленный успехом, Федор решил разработать общую теорию решения обратной задачи – как по измеренной зависимости  $T(x)$  восстановить форму тела  $r(z)$ ? Оказалось, что задача имеет решение в общем виде!

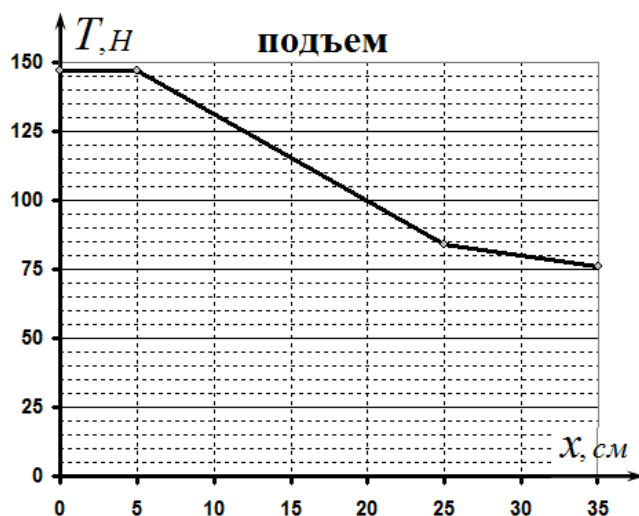
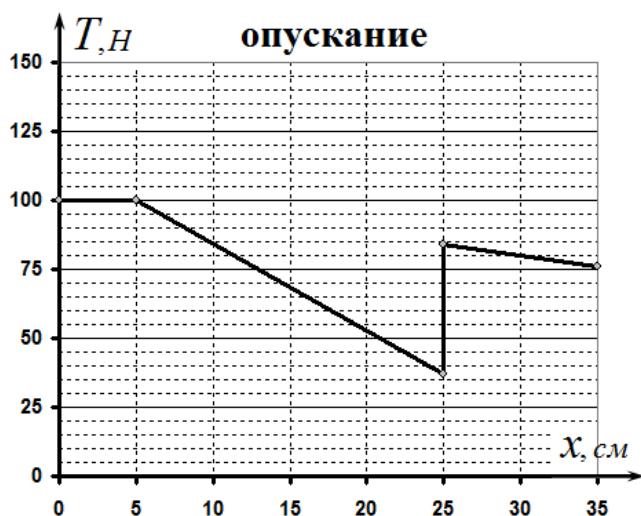
**Вопрос 3.** Допустим, что вам известен точный вид зависимости силы натяжения веревки  $T(x)$ . Выразите в общем виде функцию, описывающую форму тела  $r(z)$ .

Придя в восторг от полученных достижений, Федя решил продемонстрировать свое открытие другу Васе. Он подробно объяснил суть дела и предложил Васе самостоятельно, в тайне, изготовить любое осесимметричное тело (только такое, чтобы оно тонуло в воде), привязать его к веревке, опустить в бочку, просунув конец веревки через отверстие в крышке. Хитрый Вася согласился и всего через пять минут закончил все подготовительные работы, и предложил Феде провести свой эксперимент.

После тщательных измерений Федя построил график зависимости силы натяжения веревки от ее координаты. «Тоже мне друг называется!» - подумал Федя взглянув на график. И решил провести измерения при подъеме того же тела. Через несколько минут и второй график был готов!

Полученные графики показаны на рисунке.

«Эврика!» - воскликнул Федя и рассказал Васе, какое тело он изготовил и поместил в прибор.



**Вопрос 4.** Определите Форму тела, которое сделал Вася, найдите его размеры.

**Решение**

**Задача 11.1. Новые Архимеды.**

**Вопрос 1.** Пока тело не начал опускаться в воду (для  $x$  от нуля до 5,0 см), сила натяжения нити равна силе тяжести, действующей на тело:

$$T_0 = mg = 2,0 \cdot 10^2 \text{ Н} \quad (1)$$

При частичном погружении, на тело начинает действовать сила Архимеда, которая уменьшает силу натяжения веревки. Пока нижний цилиндр полностью не погрузился в воду (для  $x$  от 5,0 см до 20 см) сила натяжения будет определяться по формуле

$$T = T_0 - \rho g(x - x_0) \cdot \pi R_1^2. \quad (2)$$

При полном погружении нижнего цилиндра сила натяжения становится равной

$$T_1 = T_0 - \rho g h_1 \cdot \pi R_1^2 = 1,53 \cdot 10^2 \text{ Н}. \quad (3)$$

После начала погружения верхнего цилиндра (при  $x$  от 20 см до 30 см) сила натяжения будет уменьшаться медленнее, так как радиус этого цилиндра меньше:

$$T = T_0 - \rho g(x - x_0 - h_1) \cdot \pi R_2^2. \quad (4)$$

При полном погружении тела сила натяжения уменьшится до величины

$$T_2 = T_1 - \rho g h_2 \cdot \pi R_2^2 = 1,45 \cdot 10^2 \text{ Н} \quad (5)$$

График этой зависимости показан на рисунке.

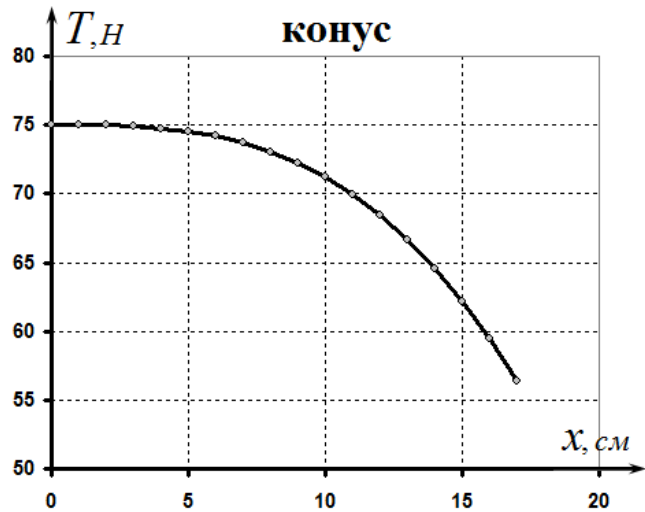
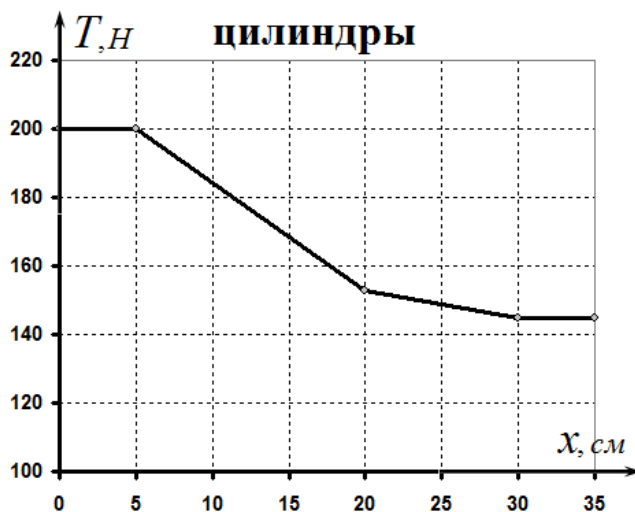
**Вопрос 2.** При погружении конуса сила натяжения веревки будет изменяться по закону

$$T = mg - \frac{1}{3} \rho g \pi x^3 \operatorname{tg}^2 \theta. \quad (6)$$

Для построения графика подставим численные значения:

$$T = 75 - 3,8 \cdot 10^{-3} x^3, \quad (7)$$

где  $x$  - в сантиметрах,  $T$  - в ньютонах. График показан на рисунке.



**Вопрос 3.** При погружении на малую величину  $\Delta x$  сила Архимеда изменяется на величину

$$\Delta F = \rho g \Delta V = \pi \rho g r^2 \Delta x, \quad (8)$$

где  $\Delta V = \pi r^2 \Delta x$  - изменение объема погруженной части. На столько же уменьшается сила натяжения нити, поэтому

$$\Delta T = -\pi \rho g r^2 \Delta x. \quad (9)$$

Из этого уравнения находим искомую формулу

$$r(x) = \sqrt{-\frac{1}{\pi \rho g} \frac{dT}{dx}}, \quad (10)$$

где  $\frac{dT}{dx}$  - производная от силы натяжения нити по координате.

Заметим, что практическое применение этой формулы к экспериментальным данным затруднительно, так численный расчет производных выполняется с большими ошибками.

#### **Часть 4.**

Вася поместил цилиндр в легкую консервную банку, которая при опускании заполнилась водой, чем и объясняются полученные графики и своеобразный «гистерезис» - различие между зависимостями при подъеме и при опускании.

Радиус банки примерно равен 10 см, ее высота 20 см, радиус вставленного цилиндра примерно 5 см.