

Условие

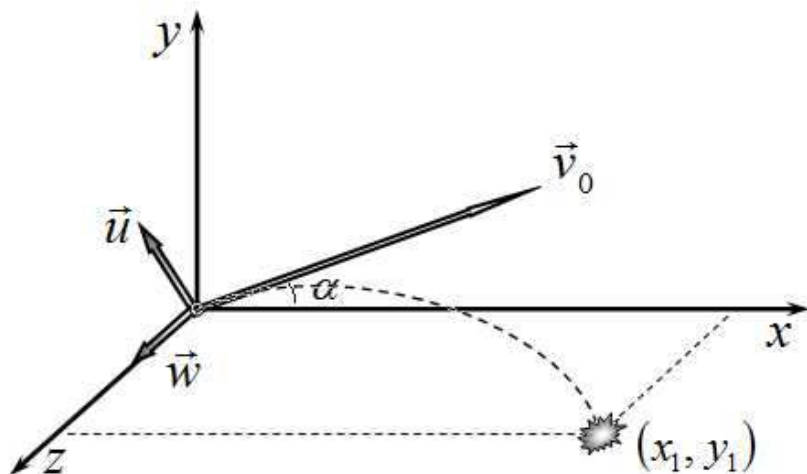
Задача 9.2. Убойная задача про убойные механизмы.



Попасть точно в цель из артиллерийского орудия — не простая задача. Еще более сложная — рассчитать, куда попадет снаряд при заданной скорости вылета и ориентации ствола. Необходимо рассмотреть множество факторов — ветер, вращение земли и т. д. В данной задаче мы предлагаем Вам учесть тот факт, что снаряд вылетает не точно вдоль ствола, а имеет некоторую скорость и в перпендикулярном направлении. Величина и направление этой скорости зависят от многих случайных факторов, поэтому при одной и той же ориентации ствола и одинаковой начальной скорости (вдоль ствола) вылета снарядов они будут попадать в некоторую область, границы которой Вам предстоит определить.

Для разминки. Пусть снаряд вылетает из пушки со скоростью v_0 , направленной вдоль ствола, ориентированного под углом α к горизонту. Ось x направим вдоль земли в направлении движения снаряда. Ось y — перпендикулярно земле.

0. Запишите уравнения движения снаряда $(x(t), y(t))$ и определите дальность полета x_0 . Помимо скорости $\vec{v}_0$ направленной вдоль оси ствола (в плоскости xOy и под углом α к горизонту) в результате случайных факторов снаряд в момент выстрела приобретает дополнительную скорость, направленную перпендикулярно вектору $\vec{v}_0$. Эту дополнительную скорость можно разложить на две компоненты: $\vec{u}$, лежащую в плоскости xOy , и $\vec{w}$ — направленную перпендикулярно ей, то есть вдоль оси Oz .



1. Запишите выражения для проекций скорости снаряда на соответствующие оси координат: v_x, v_y, v_z .

2. Запишите уравнения движения снаряда вдоль всех трех осей.

3. Определите координаты места падения снаряда $(x_1; z_1)$.

Отклонением снаряда от расчетной траектории назовем величины: $\Delta x = x_1 - x_0$ и $\Delta z = z_1$.

Скорости u и w значительно меньше скорости v_0 , поэтому, отбросив несущественные слагаемые, выражения для Δx и Δz можно записать в простом виде:

$$\Delta x = A \cos 2\alpha$$

$$\Delta z = B \sin \alpha$$

4. Выразите постоянные A и B через u и w , v_0 и ускорение свободного падения g .

Пусть $v_0 = 500 \text{ м/с}$, $g = 10,0 \text{ м/с}^2$. Рассмотрите частные случаи: а) $u = \pm 10,0 \text{ м/с}$, $w = 0$. б) $w = \pm 10,0 \text{ м/с}$, $u = 0$.

5. Рассчитайте величины отклонений (Δx и Δz) для углов $30,0^\circ$, $45,0^\circ$ и $60,0^\circ$ градусов. При стрельбе скорости u и w меняются случайным образом, однако максимальная суммарная перпендикулярная скорость ($\sqrt{u^2 + w^2}$) не превосходит значения u_0 . Пусть $u_0 = 10 \text{ м/с}$.

6. Изобразите схематически область, в которую будут попадать снаряды при многочисленных выстрелах с одной и той же скоростью $v_0 = 500 \text{ м/с}$ при одинаковом угле α . Рассмотрите три случая для углов: $30,0^\circ$, $45,0^\circ$ и $60,0^\circ$ градусов.

Тригонометрические подсказки:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

Решение

Задача 9.2. Убойная задача про убойные механизмы.

0. Уравнения движение вдоль осей:

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t, \quad (1)$$

$$y(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}. \quad (2)$$

Время полета снаряда:

$$t_n = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (3)$$

Тогда дальность полета:

$$x_0 = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (4)$$

1. Проекция скорости на оси:

$$v_x = v_0 \cos \alpha - u \sin \alpha, \quad (5)$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha + u \cos \alpha, \quad (6)$$

$$v_z = w. \quad (7)$$

2. Уравнения движения:

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha t - u \sin \alpha) t, \quad (8)$$

$$y(t) = (v_0 \sin \alpha + u \cos \alpha) t - \frac{gt^2}{2}, \quad (9)$$

$$z(t) = wt. \quad (10)$$

3. Время полета снаряда:

$$t_n = 2 \frac{v_0 \sin \alpha + u \cos \alpha}{g}, \quad (11)$$

подставляя в (8) и (10), получим:

$$x_1 = 2(v_0 \cos \alpha - u \sin \alpha)(v_0 \sin \alpha + u \cos \alpha) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} - \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{2v_0 u \cos 2\alpha}{g}, \quad (12)$$

$$z_1 = 2w \frac{v_0 \sin \alpha + u \cos \alpha}{g}. \quad (13)$$

4. Величины отклонения равны:

$$\Delta x = \frac{2v_0 u \cos 2\alpha}{g} - \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad (14)$$

$$\Delta z = \frac{2wv_0 \sin \alpha}{g} + \frac{2wu \cos \alpha}{g}. \quad (15)$$

Т. к. $w \ll v_0$ и $u \ll v_0$, то вторыми слагаемыми в выражениях можно пренебречь. Тогда искомые постоянные равны:

$$A = \frac{2v_0 u}{g}, \quad (15)$$

$$B = \frac{2v_0 w}{g} \quad (16)$$

5. Результаты расчетов представлены в таблице:

	$\alpha = 30,0^\circ$	$\alpha = 45,0^\circ$	$\alpha = 60,0^\circ$
а) $u = \pm 10,0 \text{ м/с}$, $w = 0$	$\pm 500 \text{ м}$	0 м	$\pm 500 \text{ м}$
б) $w = \pm 10,0 \text{ м/с}$, $u = 0$	$\pm 500 \text{ м}$	$\pm 707 \text{ м}$	$\pm 866 \text{ м}$

Заметим, что при угле $\alpha = 45,0^\circ$ отклонение вдоль оси x получилось равным нулю. На самом деле если учесть ранее отброшенное в (13) слагаемое, то величина отклонения оказывается равной -10 м , что совершенно несущественно.

6. Найденные в предыдущем пункте значения — это крайние точки искомой области. Но чем больше скорость вдоль одного направления, тем меньше она вдоль другого. Поэтому

точки необходимо соединить кривой, похожей (неужели?) на эллипс. В зависимости от угла, эта область будет иметь различную протяженность вдоль соответствующих осей. При угле $\alpha = 30,0^\circ$ — это круг. А при угле $\alpha = 45,0^\circ$ — прямая линия (см. рис. 1).

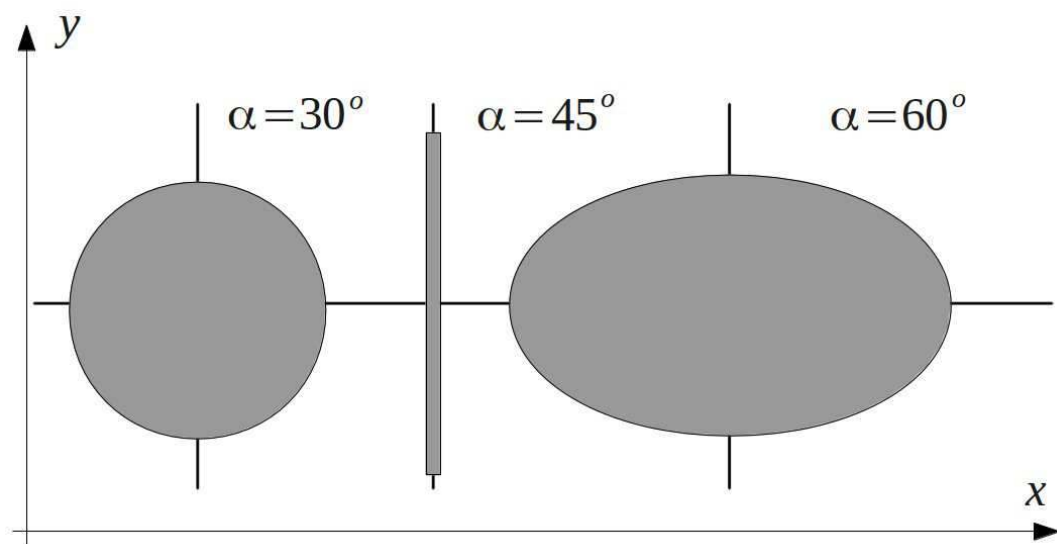


Рис. 1.