

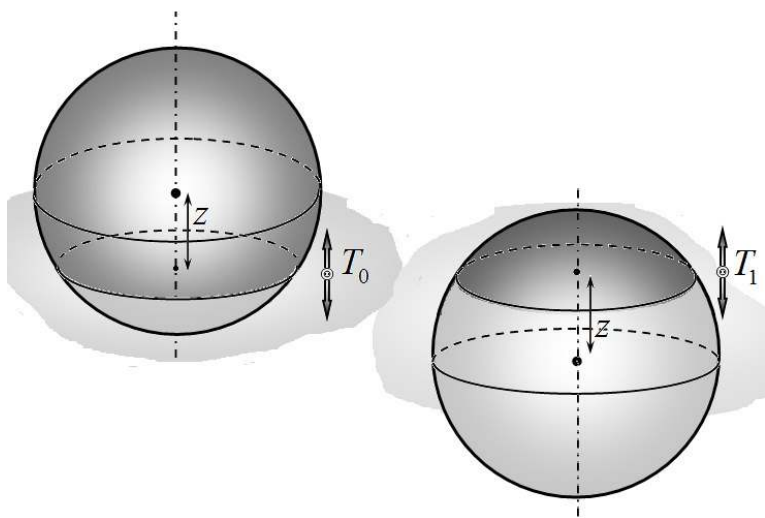
Условие

Задание 1. Колеблющиеся поплавки.

Плотность воды ρ и ускорение свободного падения g считайте известными.

Часть 1. Сферический поплавок.

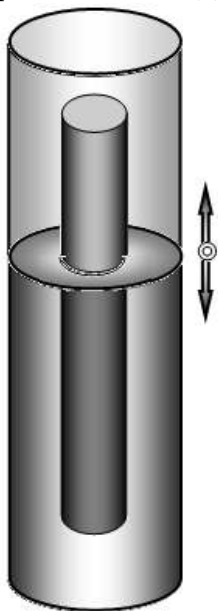
1.1 Полый шар плавает на поверхности воды, так что его центр находится на некоторой высоте z над поверхностью воды, так что ниже уровня воды находится четверть объема шара. Если шар вывести из положения равновесия, то он начнет колебаться в вертикальном направлении. Чему равен период этих малых колебаний T_0 . *Не занимайтесь геометрией – считайте величину z известной.*



1.2 Внутри шара помещают некоторый груз, его центр опускается ниже поверхности воды, и выше уровня поверхности остается четверть объема шара. Период малых вертикальных колебаний в этом случае обозначим T_1 . Найдите отношение этих периодов колебаний $\frac{T_1}{T_0}$. Вязкость воды и ее движение можно не учитывать.

Часть 2. Цилиндрический поплавок.

Цилиндрический стержень радиуса R и длины L плавает на поверхности озера. В положении равновесия над поверхностью воды находится третья часть стержня.



2.1 На каком расстоянии от нижнего основания стержня должен находиться центр масс стержня, чтобы он мог плавать вертикально? 2.2 Чему равен период малых вертикальных колебаний стержня T_0 ? 2.3 Во сколько раз изменится период этих колебаний, если стержень поместить в цилиндрический сосуд, радиус которого в два раза больше радиуса стержня?

Решение

Задание 1. Колеблющиеся поплавки.

Часть 1. Сферический поплавок.

1.1 При малом отклонении от положения равновесия уравнения движения центра шара имеет вид

$$ma = -\Delta F_A. \quad (1)$$

где $m = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ - масса шара (равная силе Архимеда в положении равновесия), $\Delta F_A = \pi r^2 x \rho g$ - изменение силы Архимеда при отклонении от положения равновесия на малую величину x , $r^2 = R^2 - z^2$ - квадрат радиуса сечения шара на уровне воды в положении равновесия. Подстановка этих выражений в уравнение приводит к уравнению

$$\frac{1}{3}\pi R^3 \rho a = -\pi(R^2 - z^2)x \rho g \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{3(R^2 - z^2)g}{R^3}x, \quad (2)$$

Которое является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{3(R^2 - z^2)g}} \quad (3)$$

1.2 При изменении массы шара в 3 раза в уравнении (1) ничего кроме массы не изменилось, поэтому период колебаний возрастет в $\sqrt{3}$ раз.

Часть 2. Цилиндрический поплавок.

2.1 Для устойчивого плавания центр масс должен находиться ниже центра плавучести (то есть центра масс вытесненной жидкости), то есть ниже половины погруженной части. Иными словами, расстояние от нижнего основания цилиндра до центра масс должно быть меньше чем

$$z < \frac{1}{3}L. \quad (1)$$

2.2 Уравнение движения поплавок при малом отклонении от положения равновесия имеет вид

$$ma = -\Delta F_A. \quad (2)$$

Здесь $m = \frac{2}{3}SL\rho$, $\Delta F_A = S\rho g x$. Подставляя в уравнение (2), получим.

$$\frac{2}{3}SL\rho a = -S\rho g x \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{3}{2}\frac{g}{L}x.$$

Следовательно, период малых колебаний поплавок равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}} \quad (3)$$

2.3 В этом случае необходимо учесть движение воды и изменение ее потенциальной энергии при движении стержня. Поэтому для решения задачи лучше воспользоваться уравнением закона сохранения энергии. Не сложно заметить, что площадь поперечного сечения воды между цилиндрическим поплавком и стенками сосуда в 3 раза больше поперечного сечения поплавка $S = 3S_0$. Поэтому если поплавок опускается вниз со скоростью v_0 , то вода в объеме $3S_0 \cdot \frac{2}{3}L = 2S_0L$ поднимается вверх со скоростью $\frac{v_0}{3}$. Следовательно, в этом случае кинетическая энергия системы оказывается равной:

$$E = \frac{m_{\text{поплавок}} v_0^2}{2} + \frac{m_{\text{воды}}}{2} \left(\frac{v_0}{3} \right)^2 = \rho \frac{v_0^2}{2} \left(\frac{2}{3}LS_0 + \frac{2}{9}LS_0 \right) = \frac{4}{9}LS_0\rho v_0^2. \quad (4)$$

При опускании цилиндра его потенциальная энергия уменьшается на величину

$$\Delta U = -mgx = -\frac{2}{3}LS_0\rho gx \quad (5)$$

При этом слой воды, находившийся под цилиндром (толщиной x), должен подняться на высоту цилиндра и растечься по свободной поверхности, занимая слой толщиной $\frac{x}{3}$. Поэтому изменение потенциальной энергии этой воды равно

$$\Delta U = \rho S_0 gx \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{3}L + \frac{x}{6} \right). \quad (6)$$

Таким образом, суммарное изменение потенциальной энергии системы равно

$$\Delta U = \frac{2}{3}\rho S_0 gx^2. \quad (7)$$

С учетом проведенных расчетов, уравнение закона сохранения энергии приобретает вид

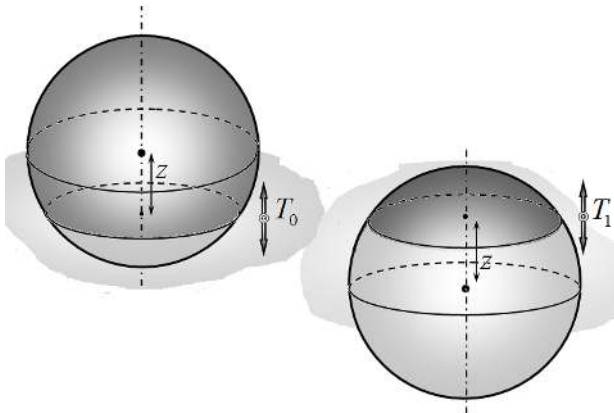
$$\frac{4}{9}LS_0\rho v_0^2 + \frac{2}{3}\rho S_0 gx^2 = \text{const} \quad (8)$$

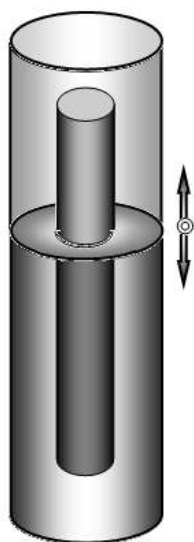
Из которого следует, что период колебаний поплавка в сосуде становится равным

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{3L}{2g}} \quad (9)$$

То есть возрастает в полтора раза.

Задание 2. Бенгальский огонь¹





¹ Задача допускает и более короткое решение, кроме того, в решении есть пункты, которые отсутствуют в окончательном варианте условия. Но автор очень старался!