

Условие

Задание 3. Нелинейные цепи

Хорошо известно, что на напряжение U и сила тока I на обыкновенном резисторе с некоторым сопротивлением R связаны соотношением $U = IR$, которое называют законом Ома для участка цепи. Подобная связь величин приводит к знакомым вам законам последовательного и параллельного соединения резисторов. В частности, если два сопротивления R_1 и R_2 соединены последовательно, то их можно заменить на эквивалентное сопротивление $R = R_1 + R_2$ (рис. 1). А если два резистора сопротивлениями R_1 и R_2 включены параллельно, то они соответствуют эквивалентному сопротивлению $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (рис. 2).

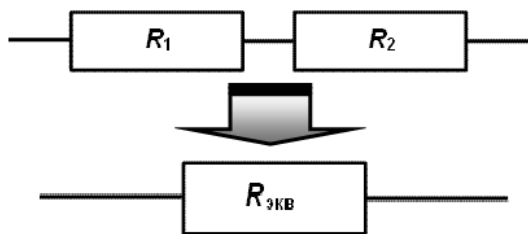


Рис. 1

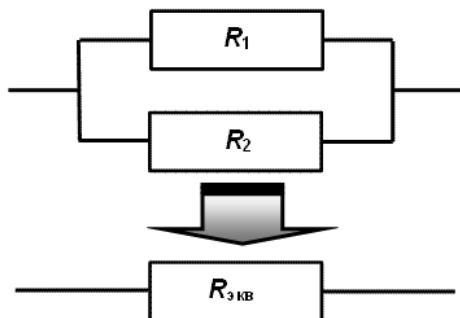


Рис. 2

В данной задаче предлагаем вам рассмотреть диоды, “закон Ома” для которых имеет непривычный вид.

1. Полупроводниковый диод

В этой части будем изучать распространённые полупроводниковые диоды. На электрических схемах они изображаются следующим образом:



Для полупроводниковых диодов связь между напряжением U и силой тока I можно приблизительно записать в виде $I = \alpha U^2$. Величину α с размерностью $\frac{\text{А}}{\text{В}^2}$ будем называть постоянной диода.

1.1. Два диода с постоянными α_1 и α_2 соединены параллельно.

1.1.а) Найдите закон параллельного соединения таких диодов, то есть определите, на диод с какой эквивалентной постоянной $\alpha_{\text{ЭКВ}}$ их можно заменить (рис. 3).

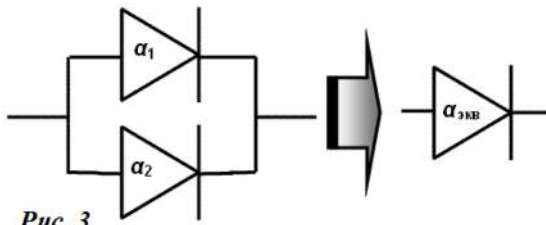


Рис. 3

1.1.b) Чему будет равно $\alpha_{\text{экв}}$, если соединить параллельно четыре диода с одинаковыми постоянными α ?

1.2. Два диода с постоянными α_1 и α_2 соединены последовательно.

1.2.a) Найдите закон последовательного соединения таких диодов, то есть определите, на диод с какой эквивалентной постоянной $\alpha_{\text{экв}}$ их можно заменить (рис. 4).

иодов, то
й $\alpha_{\text{экв}}$ их

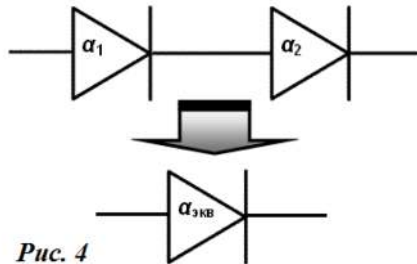


Рис. 4

1.2.b) Чему будет равно $\alpha_{\text{экв}}$, если соединить последовательно четыре диода с одинаковыми постоянными α ?

2. Туннельный диод

В данной части рассмотрим туннельный диод, который на схемах изображают символом:

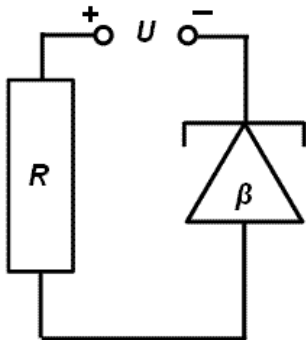


Рис. 5

Связь силы тока и напряжения на таком элементе, вообще говоря, довольно сложная. Однако, для некоторого туннельного диода, в диапазоне напряжений 0,10 В – 0,30 В данные величины можно приблизительно связать уравнением $I = \frac{\beta}{U}$. Постоянный коэффициент β имеет размерность мощности и в задаче его можно считать равным $\beta = 0,11$ мВт.



2.1. Туннельный диод включен в схему, изображённую на рисунке 5. На клеммы подаётся постоянное напряжение $U = 1,00$ В, сопротивление резистора $R = 1,0$ кОм. Найдите силу тока в данной цепи.

УТВЕРЖДАЮ Заместитель председателя оргкомитета заключительного этапа Республиканской олимпиады Заместитель Министра образования В.А. Будкевич «__» декабря 2013 г.



Республиканская физическая олимпиада 2014 год. (III этап)

Теоретический тур

Решение

Задание 3. Нелинейные цепи

1. Полупроводниковый диод

Пусть напряжение на всем участке цепи, который рассматриваем равно U , а сила тока, протекающего через него – I .

1.1. Параллельное соединение

1.1.a. При параллельном соединении напряжение на каждом из двух диодов одинаковое и равно U . Пусть через диод α_1 протекает ток силой I_1 , а через диод α_2 – I_2 (рис. 1). Так как вместе они дают полный ток в цепи I , и для каждого диода выполняется указанное соотношение $I = \alpha U^2$, получаем:

$$I = I_1 + I_2 = \alpha_1 U^2 + \alpha_2 U^2 = (\alpha_1 + \alpha_2) U^2 \quad (1)$$

С другой стороны, если заменить два параллельно соединённых диода на один с эквивалентной постоянной, то для него справедливо соотношение:

$$I = \alpha_{\text{экв}} U^2 \quad (2)$$

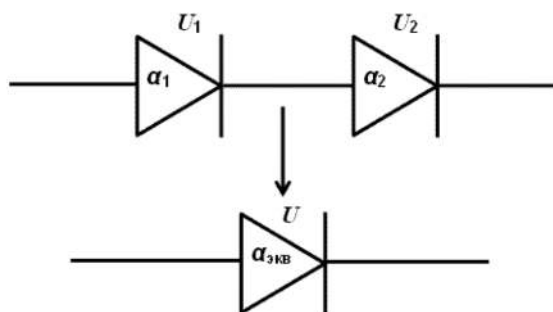
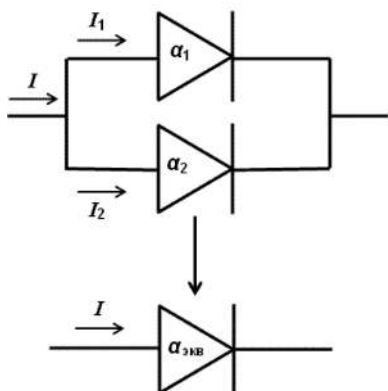
Сравнивая (1) и (2), получаем ответ:

$$\alpha_{\text{экв}} = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (3)$$

То есть при параллельном соединении диодов их постоянные просто складываются.

1.1.b. В случае параллельного соединения четырёх диодов, согласно (3), все их постоянные будут просто складываться, и полная эквивалентная постоянная окажется равной:

$$\alpha_{\text{экв}} = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 4\alpha \quad (4)$$



1.2. Последовательное соединение

1.2.a. При последовательном соединении через оба диода протекает одинаковый ток I . Напряжения на диодах α_1 и α_2 соответственно равны U_1 и U_2 (рис. 2). Так как их сумма равна полному напряжению на участке, и для каждого диода выполняется соотношение $I = \alpha U^2$, а значит $U = \sqrt{\frac{I}{\alpha}}$, получаем:

$$U = U_1 + U_2 = \sqrt{\frac{I}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{I}{\alpha_2}} = \sqrt{I} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \right) \quad (5)$$

С другой стороны, для одного диода с эквивалентной постоянной будет выполняться:

$$U = \sqrt{\frac{I}{\alpha_{\text{ЭКВ}}}} \quad (6)$$

Сравнивая (5) и (6), получаем закон последовательного соединения:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_{\text{ЭКВ}}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \quad (7)$$

Выражая отсюда $\alpha_{\text{ЭКВ}}$, можно преобразовать выражение к конечному виду:

$$\alpha_{\text{ЭКВ}} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} + \alpha_2} \quad (8)$$

1.2.b. При последовательном соединении четырёх диодов с одинаковыми постоянными α , рассуждая аналогично предыдущему пункту, получим выражение (5) в следующем виде:

$$U = \sqrt{I} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) = \sqrt{I} \left(\frac{4}{\sqrt{\alpha}} \right) \quad (9)$$

Сравнивая (6) и (9), получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_{\text{ЭКВ}}}} = \frac{4}{\sqrt{\alpha}} \quad (10)$$

Откуда следует ответ:

$$\alpha_{\text{ЭКВ}} = \frac{\alpha}{16} \quad (11)$$

2. Туннельный диод

2.1. Напряжение U , подаваемое на клеммы будет равным сумме падений напряжений на резисторе и туннельном диоде (рис. 3):

$$U = U_R + U_\beta \quad (12)$$

Зная связь напряжения и силы тока на резисторе $U_R = IR$ и на туннельном диоде $U_\beta = \frac{\beta}{I}$, получаем:

$$U = IR + \frac{\beta}{I} \quad (13)$$

Умножив обе стороны на силу тока I , получим квадратное уравнение относительно этой величины.

$$I^2 R - IU + \beta = 0 \quad (14)$$

Решаем данное уравнение. Дискриминант равен

$$D = U^2 - 4\beta R = (1,00 \text{ В})^2 - 4 \cdot 0,11 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} \cdot 1,0 \cdot 10^3 \text{ Ом} = 0,56 \text{ В}^2 \quad (15)$$

Корни уравнения, соответственно, равны

$$I_{1,2} = \frac{U \pm \sqrt{D}}{2R} = \frac{1,00 \text{ В} \pm 0,75 \text{ В}}{2 \cdot 1,0 \cdot 10^3 \text{ Ом}}$$

$$I_1 = 0,125 \text{ мА}, \quad I_2 = 0,875 \text{ мА} \quad (16)$$

Вычислим также соответствующие этим значениям тока напряжения на туннельном диоде по формуле $U_\beta = \frac{\beta}{I}$. Получим $U_{\beta 1} = 0,880 \text{ В}$ и $U_{\beta 2} = 0,126 \text{ В}$. Заметим, что значение $U_{\beta 1}$ не попадает в диапазон $0,10 \text{ В} - 0,30 \text{ В}$, указанный в условии. Это означает, что величина напряжения $U_{\beta 1}$ и соответствующая сила тока I_1 оказываются за рамками тех напряжений и токов, для которых справедливы наши формулы. Поэтому данные значения мы не можем использовать в качестве результата.

Таким образом, остаётся одно значение силы тока в цепи $I = I_2 = 0,875 \text{ мА}$.

Однако и такая сила тока в цепи не установится, так как такой режим в цепи оказывается неустойчивым. Действительно, предположим, что значение тока в цепи равно I_2 и в силу случайных причин произошло его малое колебание ΔI , для определённости, в сторону увеличения. В силу связи $U_\beta = \frac{\beta}{I}$ при увеличении тока напряжение U_β на диоде уменьшится. Но так как сумма напряжений $U_R + U_\beta$ равна постоянному напряжению U , подаваемому на клеммы, уменьшение U_β повлечёт за собой увеличение U_R . Наконец, если напряжение U_R на резисторе растёт, то растёт и сила тока, проходящего через него, а, значит, и сила тока во всей цепи. Таким образом, мы пришли к результату, что малое случайное возрастание силы тока в цепи приводит к дополнительному возрастанию этой же силы тока, что, в свою очередь, повлечёт за собой дальнейшее возрастание и так далее. В итоге, после малейшего колебания значение силы тока будет всё дальше уходить от неустойчивого I_2 , пока не выйдет из рассматриваемого диапазона величин.

$$I_{1,2} = \frac{U \pm \sqrt{D}}{2R} = \frac{1,00 \text{ В} \pm 0,75 \text{ В}}{2 \cdot 1,0 \cdot 10^3 \text{ Ом}}$$

$$I_1 = 0,125 \text{ мА}, \quad I_2 = 0,875 \text{ мА}$$

В итоге, ответ на данный пункт следующий: в диапазоне напряжений $0,10 \text{ В} - 0,30 \text{ В}$ на туннельном диоде не установится какого-либо значения силы тока.

Примечания: 1. Рассуждения об отсутствии устойчивого значения силы тока в цепи в пункте 2.1 можно было проводить, вообще говоря, и без расчетов значений I_1 и I_2 . Данные вычисления приведены в решении и оцениваются, так как они демонстрируют умение участника олимпиады рассчитать силу тока в цепи с нестандартными элементами, что, несомненно, должно быть отмечено. 2. На более широком диапазоне значений связь напряжения и силы тока для туннельного диода представлена графически на рис. 4.

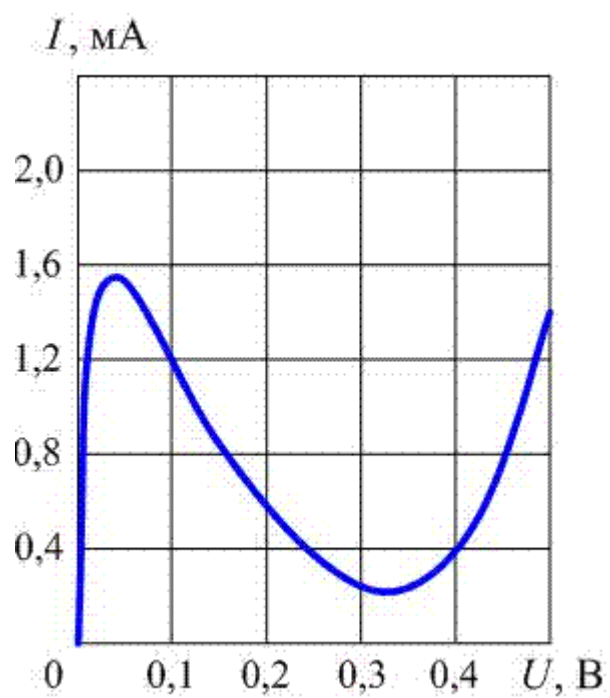


Рисунок 4

$$\frac{I}{\alpha_n} = \sqrt{I} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \right)$$

$$\alpha_{\text{ЭБЕ}} = \frac{\alpha_n + 2\sqrt{\alpha_n \alpha_n} + \alpha_n}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}} = \sqrt{I} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \right) = \sqrt{I} \left(\frac{4}{\sqrt{\alpha_n}} \right)$$

