

Условие

Задача 1. Вниз по ступенькам

В данной задаче вам предлагается рассмотреть движение вниз по ступенькам в различных вариантах. В скобках в пунктах задачи указаны величины, через которые необходимо выразить ответ. Ускорение свободного падения — g .

Часть А. Абсолютное скольжение

1. Две ступеньки

Шайба, размером которой можно пренебречь, скользит по гладкой горизонтальной поверхности с некоторой скоростью. На пути шайбы на расстоянии l друг от друга находятся две ступеньки высотой h (рис. 1). Будем считать, что соударения с шайбы с поверхностью неупругие в том смысле, что при столкновении «зануляется» вертикальная составляющая скорости, а горизонтальная сохраняется.

Рисунок 1 – Шайба и две ступеньки высотой h

Если начальная скорость шайбы будет больше некоторого критического значения $v_{кр}$, шайба перелетит одну ступеньку и ударится в ее край.

A1.1. Найдите $v_{кр}$ (l, h, g).

Далее будем рассматривать случаи $v_{кр+}$ и $v_{кр-}$, когда начальная скорость шайбы больше или меньше критической соответственно, однако мало отличается от нее. Значения $v_{кр+}$ и $v_{кр-}$ считаем приближенно равными.

A1.2. В каком из случаев, $v_{кр+}$ или $v_{кр-}$, время достижения некоторой точки Φ за ступеньками (рис. 1) будет меньше?

A1.3. В каком из случаев, $v_{кр+}$ или $v_{кр-}$, потери механической энергии по достижении точки Φ будут меньше?

2. Бесконечная лестница.

Теперь предположим, что ступенек высотой h на расстоянии l друг от друга бесконечно много. Если посмотреть на них сбоку с большого расстояния, то будет казаться, что вся лестница представляет собой сплошную наклонную плоскость, а скачущая шайба казаться просто скользящей по ней.

A2.1. Считая, что изначально шайбу запустили со скоростью $v_{кр-}$, найдите скорость ее кажущегося скольжения по такой наклонной плоскости $v_{накл}$ (h, l, g).

Часть В. Трение скольжения

Снова рассмотрим случай двух ступенек из части A1. Пусть теперь присутствует сухое трение скольжения, одинаковое на всех поверхностях. Коэффициент трения скольжения равен μ . Будем считать трение небольшим настолько, что во всех рассматриваемых случаях шайба достигает точки Φ (рис. 1).

B1.1 Пусть шайбу запустили со скоростью $v_B < v_{кр}$ с края первой ступеньки. Считая, что время соударения очень мало, определите скорость шайбы сразу после первого неупругого соударения v'_B (v_B, μ, g, h).

B1.2 В каком из случаев, $v_{кр+}$ или $v_{кр-}$, потери механической энергии будут меньше?

Решение

Задача 10-1 Вниз по ступенькам

Часть А. Абсолютное скольжение

1. Две ступеньки

A1.1. При движении шайбы горизонтальная составляющая ее скорости остается неизменной. Тогда $v_{кр}$ определяется из условия, чтобы шайба равномерно пролетела по горизонтали длину ступеньки в то время, как равноускоренно упадет на ее высоту. Тогда:

$$\frac{l}{v_{кр}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \text{ откуда:}$$

$$v_{кр} = l\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

A1.2. Так как горизонтальная составляющая скорости шайбы остается постоянной в ходе движения и расстояние до точки Φ в обоих случаях ($v_{кр+}$ и $v_{кр-}$) одно и то же, то, считая $v_{кр+}$ и $v_{кр-}$ приблизительно равными, время достижения цели будет одинаковым. Иначе говоря, время движения до точки Φ при примерно постоянной начальной скорости не зависит от того, было ли промежуточное соударение со ступенькой.

A1.3. В силу сохранения горизонтальной составляющей скорости шайбы кинетическая энергия шайбы в начале и движения и в точке Φ в обоих случаях совпадают. Таким образом, «теряется» лишь потенциальная энергия шайбы в поле тяжести, изменение которой в обоих случаях равно $U = 2mgh$, где m – масса шайбы. Потери механической энергии в случаях $v_{кр+}$ или $v_{кр-}$ одинаковы.

2. Бесконечная лестница.

A2.1. Так как в бесконечной лестнице движение на каждой следующей ступеньке будет повторять движение на предыдущей, достаточно рассмотреть лишь один пролет. Одну ступеньку шайба пролетит за время $t_1 = \frac{l}{v_{кр-}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. При этом по наклонной плоскости шайба преодолеет расстояние, равное диагонали одной ступеньки $s_1 = \sqrt{l^2 + h^2}$. Тогда скорость кажущегося движения равна:

$$v_{накл} = \frac{s_1}{t_1} = \sqrt{\frac{g(l^2 + h^2)}{2h}}$$

Часть В. Трение скольжения

B1.1 Во время соударения на шайбу действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$ – вертикально вниз, сила реакции со стороны поверхности $\vec{N}$ – вертикально вверх и сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$ – горизонтально против направления движения. Вертикальная составляющая скорости перед соударением равна $v_y = \sqrt{2gh}$, после неупругого соударения – нулю. Тогда 2-й закон Ньютона в импульсной форме в проекции на ось, направленную вертикально вверх, выглядит следующим образом:

$$0 - (-mv_y) = (N_{ср} - mg)\Delta t$$

где $N_{ср}$ – средняя сила реакции за Δt – время соударения. Так как время соударения очень мало, то для того, чтобы произведение в правой части равнялось mv_y , необходимо чтобы сила реакции $N_{ср}$ была достаточно велика (на силу тяжести такое требование наложить нельзя, так как она полностью определена массой шайбы). Тогда силой тяжести в разности в правой части можно пренебречь, откуда:

$$N_{ср} = \frac{mv_y}{\Delta t}$$

Так как в любой момент времени справедливо $F_{тр} = \mu N$, то аналогичное выражение выполняется и для средних по времени величин. Тогда 2-й закон Ньютона в импульсной форме в проекции на горизонтальную ось вдоль направления движения можно записать в виде:

$$mv'_B - mv_B = -F_{тр\ ср}\Delta t = -\mu N_{ср}\Delta t = -\mu mv_y$$

Отсюда получаем:

$$v'_B = v_B - \mu v_y = v_B - \mu\sqrt{2gh}$$

В1.2 Для того чтобы $v_{кр}$ сохранила значение и смысл, указанный в пункте А1.1, будем считать, что это скорость в момент отрыва с верхней ступеньки. В случае $v_{кр}$ потери механической энергии происходят на трех этапах: первое соударение со ступенькой, второе соударение с поверхностью, скольжение по поверхности до точки Ф. При первом соударении потери можно найти, зная скорость после соударения, рассчитанную в пункте В1.1:

$$Q_{1-} = E_{до} - E_{после} = \frac{mv_{кр-}^2}{2} + mgh - \frac{mv_{1-}^2}{2}$$

где $v_{1-} = v_{кр-} - \mu\sqrt{2gh}$. Подставляя выражение для $v_{кр-}$, получаем:

$$Q_{1-} = \mu mg(l - \mu h) + mgh$$

Потери энергии во время второго соударения считаются аналогично:

$$Q_{2-} = E_{до} - E_{после} = \frac{mv_{1-}^2}{2} + mgh - \frac{mv_{2-}^2}{2}$$

где $v_{2-} = v_{1-} - \mu\sqrt{2gh} = v_{кр-} - 2\mu\sqrt{2gh}$. Отсюда следует:

$$Q_{2-} = \mu mg(l - 3\mu h) + mgh$$

Во время «второго полета» шайба отлетит от ступеньки по горизонтали на расстояние $l_{1-} = v_{1-}\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Если обозначить расстояние от края ступеньки до точки Ф за s , то в силу постоянства силы трения скольжения и отсутствия вертикального ускорения потери энергии на третьем этапе будут равны:

$$Q_{3-} = \mu mg(s - l_{1-}) = \mu mg(s - l + 2\mu h)$$

Таким образом, полные потери энергии в случае $v_{кр-}$ равны:

$$Q_- = Q_{1-} + Q_{2-} + Q_{3-} = \mu mg(s + l - 2\mu h) + 2mgh$$

В случае $v_{кр+}$ потери энергии происходят на двух этапах: соударение с поверхностью и дальнейшее скольжение. Расчет производится по формулам, аналогичным приведенным выше. На первом этапе:

$$Q_{1+} = E_{до} - E_{после} = \frac{mv_{кр+}^2}{2} + mg(2h) - \frac{mv_{1+}^2}{2}$$

где $v_{1+} = v_{кр+} - \mu\sqrt{4gh}$ рассчитывается аналогично пункту В1.1. Отсюда:

$$Q_{1+} = \mu mg(l\sqrt{2} - 2\mu h) + 2mgh$$

Во время полета по горизонтали шайба пролетает расстояние $l_{1+} = v_{кр+}\sqrt{\frac{4h}{g}}$. Тогда потери энергии на втором этапе равны:

$$Q_{2+} = \mu mg(s + l - l_{1+}) = \mu mg(s + l - l\sqrt{2})$$

Полные потери энергии в случае $v_{кр+}$:

$$Q_+ = Q_{1+} + Q_{2+} = \mu mg(s + l - 2\mu h) + 2mgh$$

То есть потери энергии в обоих случаях одинаковы. Данный результат говорит о том, что зависимость потерь энергии от начальной скорости шайбы непрерывна, не испытывает скачка

в точке $v_{кр}$.

Упражнение 2

$$v_{кр} = \frac{2h}{mv_{кр}}$$

$$mv_{B'} - mv_B = -F_{тр\text{ср}} \Delta t = -\mu N_{ср} \Delta t = -\mu mv_{кр}$$

$$v_{1-}' = v_{1-} - \mu v_{1-} = v_{кр-} - \mu \sqrt{2gh}$$

$$Q_{1-} = E_{до} - E_{после} = \frac{mv_{кр-}^2}{2} + mgh$$

$$v_{1-} = v_{кр-} - \mu \sqrt{2gh}$$

$$Q_{2-} = E_{до} - E_{после} = \frac{mv_{1-}^2}{2} + mgh - \frac{mv_{2-}^2}{2}$$

$$v_{2-} = v_{1-} - \mu \sqrt{2gh} = v_{кр-} - 2\mu \sqrt{2gh}. \text{ Отсюда следует:}$$

$$Q_{2-} = \mu mg(l - 3\mu h) + mgh$$

$$Q_+ = E_{до} - E_{после} = \frac{mv_{кр+}^2}{2} + mgh$$

$$v_{1+} = v_{кр+} - \mu \sqrt{4gh}$$