

Условие

11 класс.

1. Полный комплект состоит из семи частей, связанных общей идеей.
2. При оформлении работы каждую задачу начинайте с новой страницы. Первая половина тетради предназначена для чистовика, вторая - для черновика. При недостатке бумаги обращайтесь к оргкомитету!
3. Подписывать тетради и отдельные страницы запрещается.
4. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.
5. Со всеми вопросами, связанными с условиями задач (но не с их решениями), обращайтесь к представителям Жюри.



Постарайтесь внимательно прочитать условия задач! Может вам покажется, что условия задач слишком длинные. Но мы сочинили их такими, чтобы Вам было легче решать. Поверьте, иногда решения короче таких условий! Не теряйте присутствия духа, смело беритесь за решение каждой задачи. Помните, оцениваются не только полные решения, но и их отдельные части и даже отдельные здравые мысли.

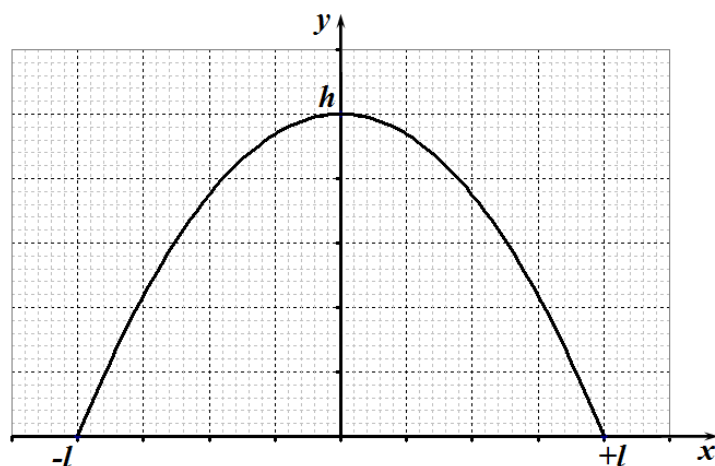
Параболическая физика.

Часть 1. Математическое введение.

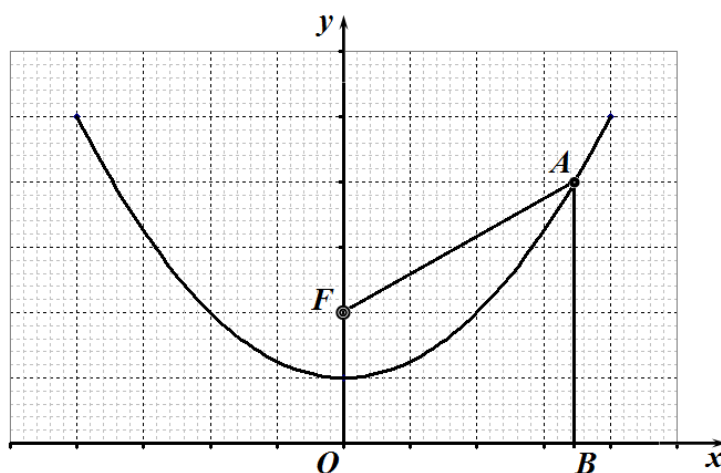
На уроках математики вы изучали квадратичную функцию

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

И, возможно, знаете, что ее графиком является парабола. Такая функция часто встречается и в физике. Иногда бывает полезно представить эту функцию в таком виде, чтобы ее параметры имели наглядный смысл.



1.1 Запишите уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy , пересекающей ось Ox в точках $x = \pm l$, а ось Oy в точке $y = h$ (рис. 1) Рис. 1

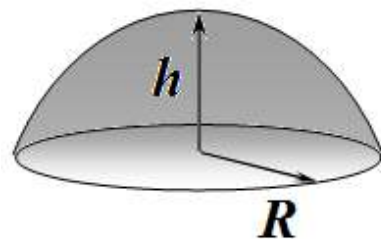


1.2 Параболу можно также определить, как геометрическое место точек A , таких, что расстояние от этих точек до прямой (называемой *директрисой* параболы) равно расстоянию до некоторой точки F (называемой фокусом параболы) $AB = AF$. Запишите уравнение параболы, для которой директрисой является ось Ox , а фокус лежит на оси Oy в точке $y_F = a$ (рис. 2). Рис. 2

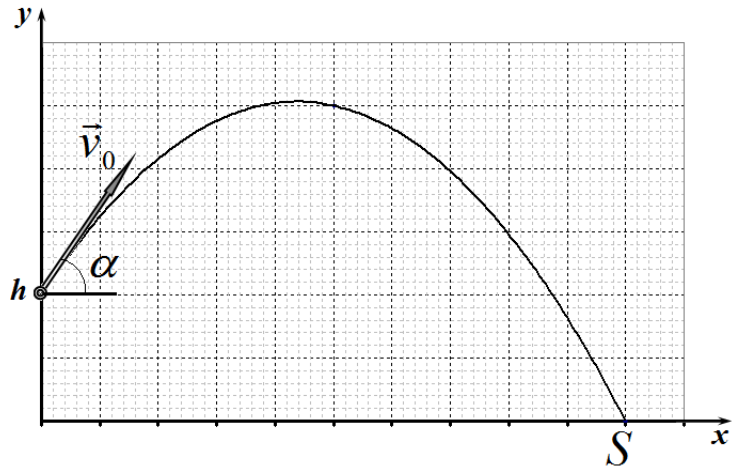
При решении задачи вам понадобится формула (выводить ее не надо) для объема кругового параболоида радиуса R и высотой h .

$$V = \frac{1}{2}\pi R^2 h$$

Такая фигура получается при вращении параболы вокруг собственной оси (Рис. 3). Рис. 3



Часть 2. Тело брошено под углом к горизонту... сопротивление воздуха не учитывать!



2.1 Камень бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 с обрыва высотой h над поверхностью воды. Совместим ось Ox с поверхностью воды, а вертикальную ось Oy проведем через точку бросания (Рис. 4)

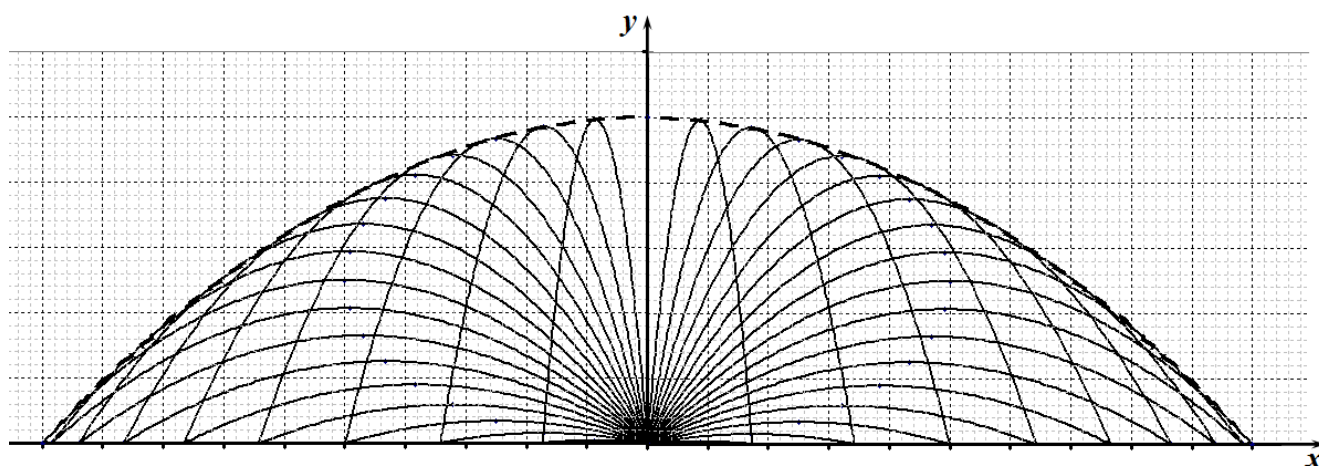
2.1.1 Запишите уравнение траектории полета камня $y(x)$.

2.1.2 Найдите, на каком расстоянии S от обрыва камень упадет в воду.

2.1.3 Под каким углом к горизонту следует бросать камень (при неизменном модуле начальной скорости v_0), чтобы он упал на максимально возможном расстоянии от обрыва? Чему равно это максимальное расстояние $S_{\max}$?

Часть 3 Парабола безопасности

3.1 Некий хулиган любит бросаться камнями. Пусть он бросает камни из начала координат под произвольными углами к горизонту, но с одной и той же начальной скоростью v_0 . Покажите, что огибающая всех траекторий камней (граница области досягаемости) является параболой. Найдите уравнение этой параболы $Y(x)$ (которая также называется *параболой безопасности* - на рис. 5 она изображена пунктиром).



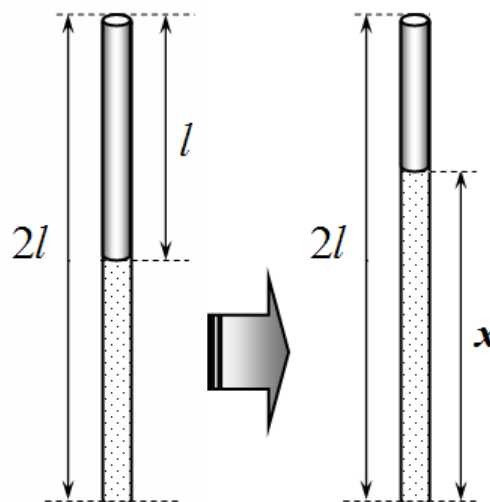
Часть 4. Газовая парабола

В вертикальной трубке длиной $2l$ с открытым верхним концом столбик ртути высотой l запирает воздух, находящийся в нижней части пробирки при температуре $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Атмосферное давление равно $P_0 = 0,80l$ (в мм рт. ст.)

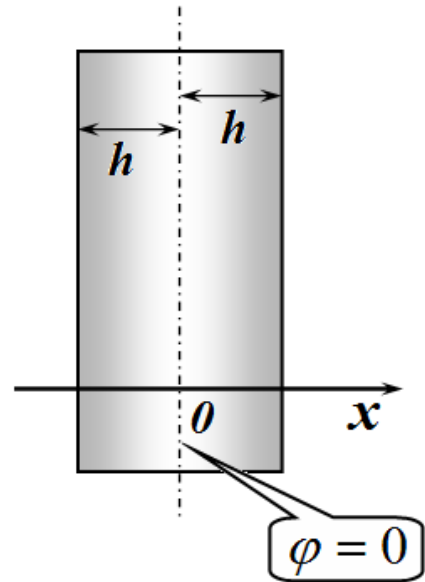
Чтобы вытеснить ртуть из трубки воздух в ней начинают медленно нагревать. Будем считать процесс нагревания квазистационарным, т.е. при любой высоте столбика воздуха x система находится в равновесии.

4.1 Постройте графики зависимостей давления $P(x)$ и температуры воздуха $T(x)$ в пробирке от высоты столбика воздуха x в процессе расширения газа. Выберите такие единицы измерения, чтобы ваши графики были точными, а не схематическими.

4.2 До какой минимальной температуры следует нагреть газ, чтобы он полностью вытеснил ртуть из трубки?



Часть 5. Электрическая парабола



5.1 Пластина толщиной $2h$ равномерно заряжена с объемной плотностью заряда ρ . поперечные размеры пластины значительно больше ее толщины, так что граничными эффектами можно пренебречь.

Ось Ox направлена перпендикулярна пластине, начало отсчета находится в центре пластины.

5.1.1 Найдите зависимость проекции вектора напряженности электрического поля E_x на ось Ox от координаты x в диапазоне $x \in [-2h, +2h]$. Постройте график полученной зависимости. Считайте заряд пластины отрицательным.

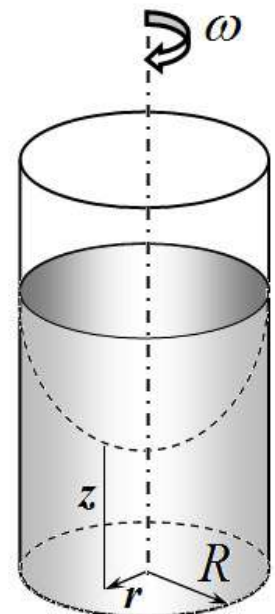
5.1.2 Найдите зависимость потенциала электростатического поля от координаты x в диапазоне $x \in [-2h, +2h]$, если потенциал в центре пластины принят равным нулю $\varphi(0) = 0$. Постройте график полученной зависимости.

Часть 6. Парабола в стакане

Высокий цилиндрический сосуд радиуса R частично заполнен водой, высота уровня воды в покое равна h_0 . Сосуд начинают раскручивать вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью сосуда. При этом на поверхности воды образуется осесимметричная воронка.

6.1 Найдите уравнение профиля этой воронки, т.е. высоту уровня воды z в точке, находящейся на расстоянии r от оси вращения. Угловая скорость вращения равна ω , при этом вода из сосуда не выливается, воронка не достает дна сосуда.

6.2 При какой угловой скорости вращения ω^* воронка достигнет дна сосуда?



Часть 7. Оптическая парабола

Американский физик Д.Вуд предложил оригинальную отражательную

оптическую систему (телескоп Вуда): сосуд со ртутью вращают с малой угловой скоростью $\omega = 1,5$ рад/с. Поверхность ртути представляет собой зеркало, в котором формируется изображение звезд.

6.1 Докажите, что все (а не только идущие на малых расстояниях от оси) параллельные лучи, падающие на зеркало после отражения в нем пересекутся в одной точке. На каком расстоянии от вершины зеркала находится эта точка?

6.2 Две звезды находятся вблизи зенита так, что угловое расстояние между ними для земного наблюдателя равно $\Delta\alpha = 1,0^\circ$. Найдите расстояние Δl между их изображениями в телескопе Вуда при заданных параметрах системы.

Считайте ускорение свободного падения равным $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

⁴ Так как атмосферное давление измерено в мм рт. ст., то и гидростатическое давление столба ртути также можно измерять в мм рт. ст., которое численно равно высоте столба.