

молярными

Условие

Задание 3. Теплоёмкость процесса.

В задаче рассматриваются равновесные процессы, проходящие с одним молем идеального газа. Поэтому все характеристики состояния газа и происходящих процессов являются «молярными» - молярный объем, молярные теплоемкости и т.д.

Математическая подсказка. Если аргумент функции $y = ax^m$ изменяется на малую величину Δx , то изменение функции равно $\Delta y = amx^{m-1}\Delta x$, при любом показателе степени.

Часть 1. Политропические процессы.

Теплоемкость является характеристикой процесса. Процессы, в ходе которых теплоемкость остается постоянной, называются **политропическими**. В общем случае уравнение политропического процесса имеет вид

$$PV^n = const, \quad (1)$$

где n - постоянное число (не обязательно целое), называемое **показателем политропы**.

3.1.1 Покажите, что теплоемкость идеального газа в произвольном процессе определяется уравнением

$$C = C_V + P \frac{\Delta V}{\Delta T}, \quad (2)$$

где C_V - теплоемкость газа при изохорном процессе, ΔV изменение объема газа в рассматриваемом процессе при малом изменении температуры ΔT .

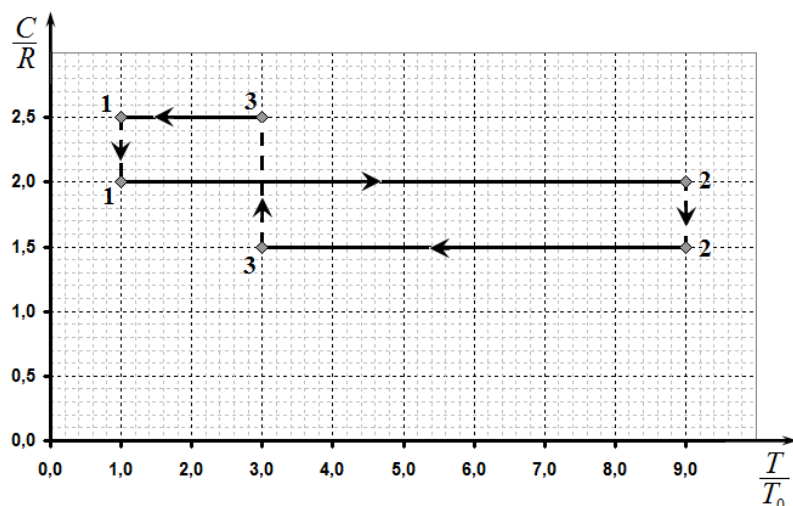
3.1.2 Покажите, что в процессах, описываемых уравнением (1) теплоемкость остается постоянной. Найдите теплоемкость одного моля идеального одноатомного газа в политропическом процессе (1), т.е. установите связь между молярной теплоемкостью C и показателем политропы n .

3.1.3 Укажите значения молярной теплоемкости C и соответствующего ей показателя n в известных процессах. Результаты представьте в следующей таблице.

№	Процесс	**Молярная теплоемкость C^{**}	**Показатель n^{**}
1	Изобарный		
2	Изотермический		
3	Изохорный		
4	Адиабатный		

Часть 2. «Разорванный» цикл.

Один моль идеального одноатомного газа совершает циклический процесс, в котором теплоемкость зависит от температуры в соответствии с графиком, приведенном на рис. 1. Здесь $T_0 = 300$ К - температура газа в состоянии 1;



$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

- универсальная газовая постоянная.

3.2.1 Изобразите этот цикл на диаграмме $\left(\frac{P}{P_0}, \frac{V}{V_0}\right)$, где P_0, V_0 - давление и объем газа в состоянии 1. 3.2.2 Рассчитайте работу газа за весь цикл. 3.2.3 Найдите термический КПД цикла. 3.2.4 Предложите простое устройство, в котором реализуется процесс 1-2.

УТВЕРЖДАЮ Заместитель председателя оргкомитета заключительного этапа Республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Р.С.Сидоренко «___» декабря 2015 г.

Республиканская физическая олимпиада 2016 год. (III этап)

Теоретический тур



Решение

Задание 3. Теплоемкость процесса.

Часть 1. Политропические процессы.

3.1.1 Теплоемкость системы определяется как отношение количества теплоты, полученной системой к изменению ее температуры

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T}. \quad (1)$$

Используя уравнение первого закона термодинамики для идеального газа

$$\delta Q = \Delta U + \delta A = C_V \Delta T + P \Delta V, \quad (2)$$

получим требуемое в условии соотношение

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = C_V + P \frac{\Delta V}{\Delta T}. \quad (3)$$

3.1.2 Запишем уравнение процесса в виде

$$PV^n = B, \quad (4)$$

где B — некоторая постоянная. С помощью уравнения состояния идеального газа

$$PV = RT \quad (5)$$

Выразим явную зависимость температуры газа от его объема

$$T = \frac{B}{R} V^{1-n}. \quad (6)$$

Из вида этой зависимости с помощью математической подсказки находим

$$\Delta T = \frac{B}{R} V^{-n} (1-n) \Delta V \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{RV^n}{B(1-n)}.$$

Подставляя в уравнение (3) выражения (7) и выражения для давления в данном процессе, следующее из (7), получим

$$C = C_V + P \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{3}{2}R + \frac{R}{1-n}.$$

3.1.3 Уравнение изобарного процесса $P = \text{const}$ следует из общего уравнения политропического процесса $PV^n = \text{const}$ при $n = 0$. Из общей формулы (8) следует, что в этом процессе $C = \frac{5}{2}R$.

Уравнение изотермического процесса имеет вид $PV = \text{const}$. Для этого процесса $n = 1$. Следовательно, в этом процессе $C \rightarrow \infty$

Для определения параметров изохорного процесса, запишем общее уравнение политропического процесса в виде

$$PV^n = \text{const} \Rightarrow P^{\frac{1}{n}} V = \text{const},$$

из которого следует, что в этом процессе $n \rightarrow \infty$, поэтому $C = C_V = \frac{3}{2}R$.

Из определения адиабатного процесса, как процесса без теплообмена, следует, что в этом процессе $C = 0$. Тогда из формулы (8) следует

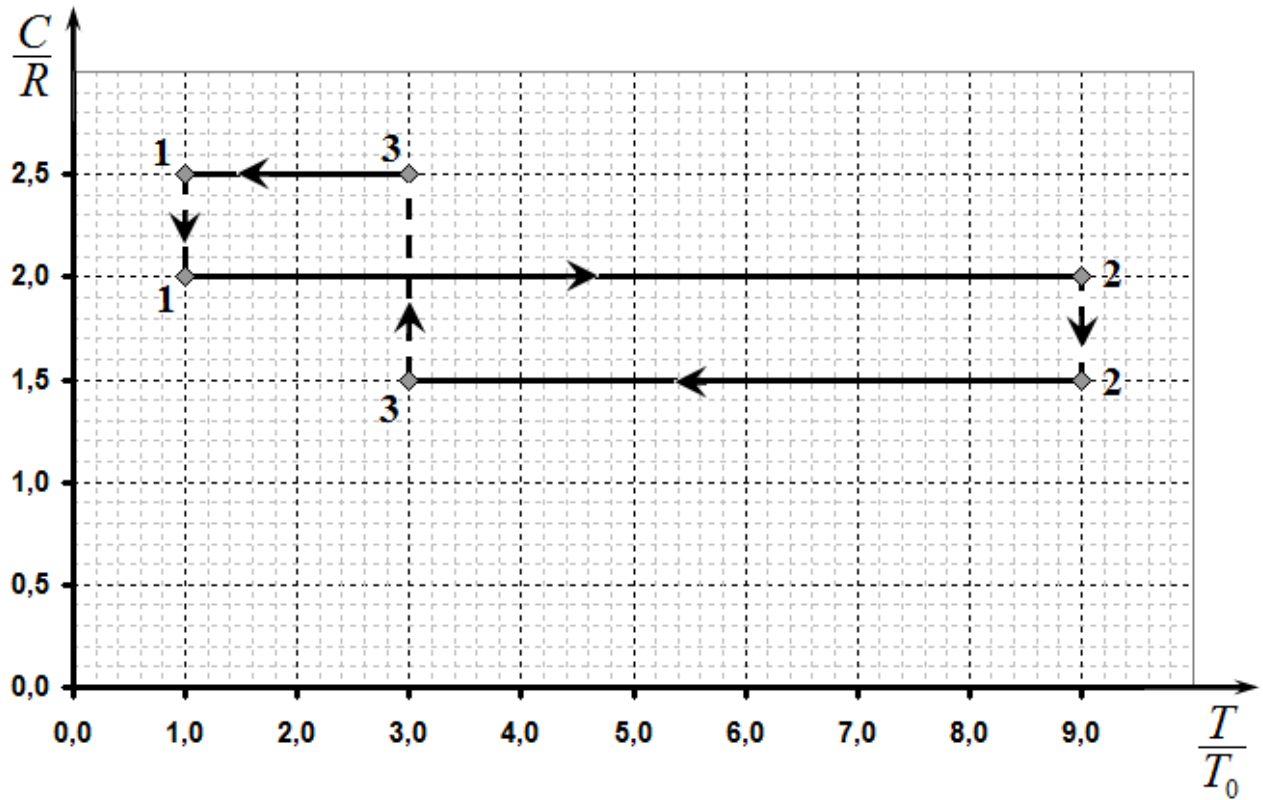
$$C = \frac{3}{2}R + \frac{R}{1-n} = 0 \Rightarrow n = \frac{5}{3}.$$

Полученные значения сведены в таблице.

Таблица.

№	Процесс	Показатель n	Молярная теплоемкость C
1	Изобарный	$n = 0$	$C = \frac{5}{2}R$
2	Изотермический	$n = 1$	$C \rightarrow \infty$
3	Изохорный	$n \rightarrow \infty$	$C = \frac{3}{2}R$
4	Адиабатный	$n = \frac{5}{3}$	$C = 0$

Часть 2. «Разорванный» цикл.



политропическими процессами. В процессах 2-3 и 3-1 легко узнать изохорный и изобарный процессы, соответственно.

В процессе 1-2 теплоемкость постоянна и равна $C = 2R$, поэтому показатель политропы в этом процессе равен

$$\frac{3}{2}R + \frac{R}{1-n} = 2R \Rightarrow n = -1. \quad (11)$$

Следовательно, уравнение этого процесса имеет вид $PV^{-1} = \text{const} = B$, или

$$P = BV, \quad (12)$$

Т.е. в этом процессе давление прямо пропорционально объему!

Из графика следует, что температура в этом процессе возросла в 9 раз. Подставляя уравнение процесса (12) в уравнения состояния, получим

$$BV^2 = RT. \quad (13)$$

Отсюда следует, что в данном процессе объем и давление возрастают в три раза.

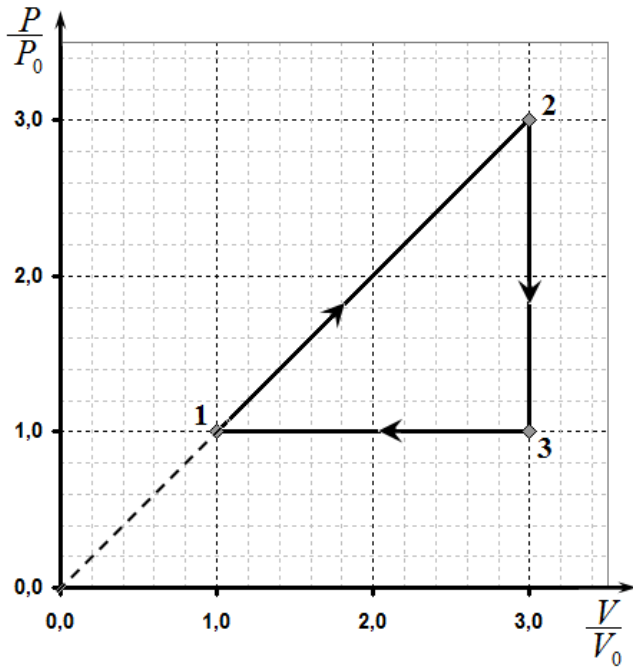
Это позволяет построить график процесса в требуемых координатах $\left(\frac{P}{P_0}, \frac{V}{V_0}\right)$ (см. рисунок).

3.2.2 Работа, совершенная за цикл численно равна площади цикла в координатах (P, V) . Поэтому в данном случае

$$A_{\Sigma} = \frac{1}{2}(P_2 - P_3)(V_3 - V_1) = 2P_0V_0 \quad (14)$$

Используя уравнения состояния, последнее выражение можно записать в виде, который дает возможность найти численное значение работы

$$A = 2P_0V_0 = 2RT_0 = 5,0 \text{ кДж} \quad (15)$$



3.2.3 Очевидно, что в данном циклическом процессе газ получает теплоту только на участке 1-2. Согласно первому закону термодинамики это количество теплоты рассчитывается по формуле

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}. \quad (16)$$

Здесь изменение внутренней энергии

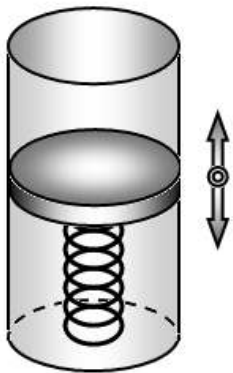
$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}R(T_3 - T_1) = 12RT_0 = 12P_0V_0; \quad (17)$$

А работа на этом участке равна площади трапеции под отрезком прямой 1-2:

$$A_{12} = \frac{P_1 + P_3}{2}(V_3 - V_1) = 4P_0V_0. \quad (18)$$

Таким образом, КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A_{\Sigma}}{Q_{12}} = \frac{2P_0V_0}{12P_0V_0 + 4P_0V_0} = \frac{1}{8} = 12,5\%. \quad (19)$$



3.2.4 Процесс, в котором давление возрастает пропорционально объему можно реализовать в сосуде с подвижным поршнем, если поршень прикреплен ко дну сосуда пружиной. Если пренебречь длиной пружины в недеформированном состоянии и внешним давлением, то процесс расширения газа будет описываться уравнением (12).