

Условие

Задание 3. Как разгоняется газ?

*Цель данной задачи – показать, как газы протекают через сопло реактивного двигателя, почему профиль сопла изменяется не монотонно: сначала сужается, а затем расширяется! Точные расчеты формы сопла и в настоящее время представляют собой невероятно сложную аэродинамическую задачу, поэтому мы ограничимся самыми простыми примерами, показывающими основные физические идеи, лежащие в основе конструирования реактивных двигателей. Поэтому задача содержит много промежуточных вопросов, которые помогут Вам прийти к далекому финишу этой задачи

Подсказки.

1. Процесс, протекающий без теплообмена, называется адиабатическим. Уравнение адиабатического процесса идеального газа имеет вид*

$$PV^\gamma = \text{const}, \quad (1)$$

показатель адиабаты γ (для всех газов $\gamma > 1$) и молярную массу газа M считайте известными.

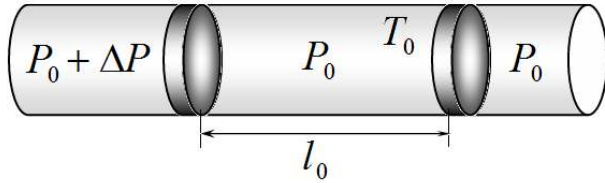
2. Во многих пунктах задачи используйте приближенную формулу

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \quad (2)$$

справедливую при $x \ll 1$ и любых α .

Часть 1. В цилиндрической трубе.

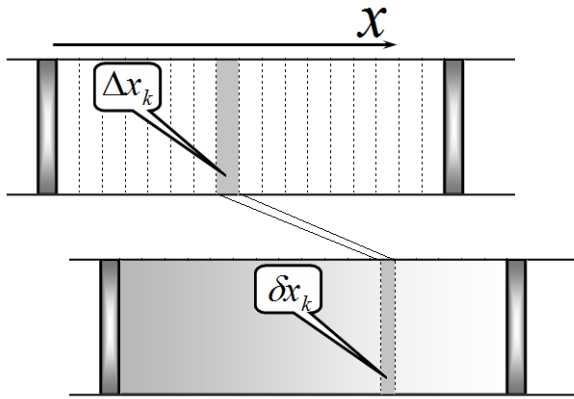
В очень длинной горизонтальной цилиндрической трубе находятся два легких (массой можно пренебречь) плотно пригнанных поршня, которые могут скользить по трубе без трения. В начальный момент между поршнями находится идеальный газ при температуре T_0 и давлении P_0 , расстояние между поршнями равно l_0 . Снаружи от поршней находится газ под давлением P_0 , т.е. система находится в равновесии. Теплопроводностью и теплоемкостью стенок трубы и поршней следует пренебрегать.



В некоторый момент времени слева от поршней давление резко возросло на величину ΔP (причем $\Delta P \ll P_0$), поршни и газ между ними пришли в движение. Считайте, что давления снаружи от поршней поддерживаются постоянными.

В данной части задачи Вам необходимо определить увеличиться, или уменьшится расстояние между поршнями в процессе их движения.

Подсказки. Мысленно разбейте пространство между поршнями на малые равные промежутки (можно даже считать, что между ними есть тонкие невесомые перегородки) и следите за отдельными порциями газа Δx_k и все характеристики этих порций определяйте как функции их начальных координат x (не смотря на то, что реальные координаты перегородок изменяются в процессе движения).



1. Процесс установления равновесия в газе между поршнями можно условно разбить на два этапа: первый: установление равновесного распределения давления, которое происходит практически мгновенно; можно считать, что на этом этапе изменение объема каждой выделенной порции газа происходит адиабатически, т.е. без теплообмена; второй: установление теплового равновесия посредством теплообмена между отдельными порциями газа; на этом этапе можно пренебречь работой газа над внешними телами.

1.1 Определите установившееся ускорение поршней a (когда ускорения каждого из поршней будут равны).

1.2 Определите зависимость давления газа между поршнями от координаты x (напоминаем – это координаты в начальном положении) $P(x)$

1.3 Найдите зависимость относительной деформации газа от координаты x на первом этапе установления равновесия..

Подсказка: Пусть начальная толщина выделенной порции газа равна Δx_k , а в процессе движения она стала равной δx_k . Тогда относительной деформацией называется величина $\varepsilon = \frac{\delta x_k - \Delta x_k}{\Delta x_k}$. Считайте все деформации малыми $\varepsilon \ll 1$

1.4 Найдите изменение расстояния между поршнями Δl_1 на первом этапе установления равновесия. Уменьшится или увеличится это расстояние по сравнению с l_0 ?

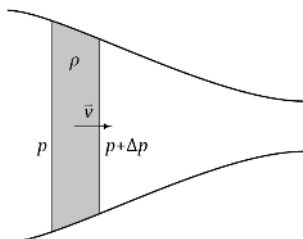
1.5 Найдите распределение температуры газа между поршнями на первом этапе установления равновесия.

1.6 Найдите установившуюся температуру газа между поршнями после установления теплового равновесия.

1.7 Найдите изменение расстояния между поршнями Δl_2 после установления теплового равновесия. Уменьшится или увеличится это расстояние по сравнению с l_0 ?

Часть 2. В сопле переменного сечения.

В реактивном двигателе, газы появляющиеся в результате сгорания топлива проходят через сопло, площадь сечения которого плавно изменяется. Рассмотрим небольшую порцию газа проходящего через сопло. Так как газ проходит через сопло очень быстро, то все процессы, протекающие в нем можно считать адиабатическими.



2.1 Найдите зависимость плотности этой порции газа ρ от его давления p , при условии, что на входе в сопло плотность газа равна ρ_0 , а давление P_0 .

2.2 Определите зависимость изменения плотности данной порции газа $\Delta\rho$ от изменения его давления ΔP . Выразите эту зависимость через локальную скорость звука в этом газе, которая определяется по формуле $c = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$

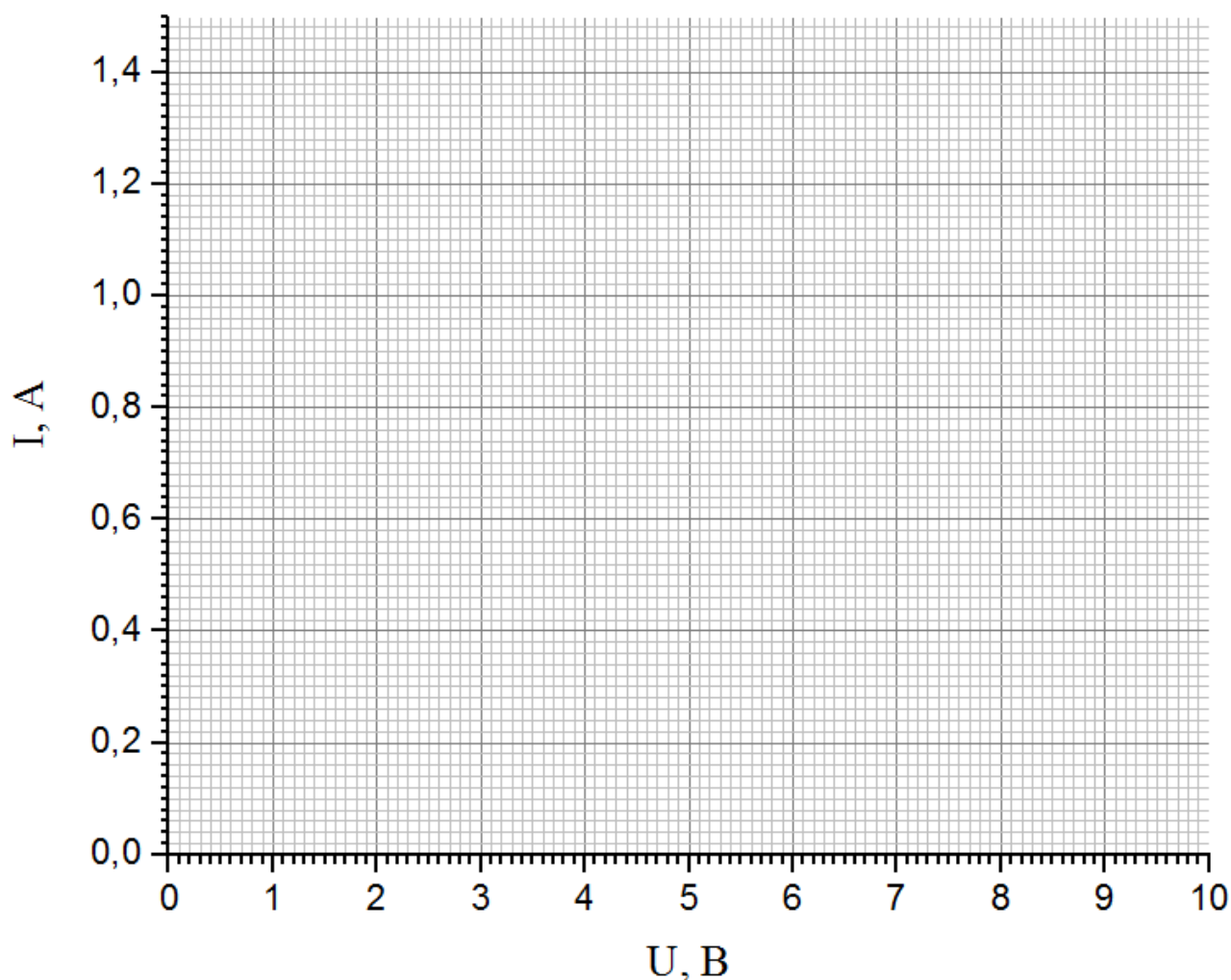
2.3 Определите изменение скорости порции газа Δv при ее малом смещении, если давление при этом изменилось на величину ΔP . Выразите эту величину через ΔP , плотность газа ρ и ее скорость v .

2.4 Выразите изменение скорости порции газа Δv через площадь сечения в данной точке, изменение площади сечения ΔS , скорость газа v и локальную скорость звука c .

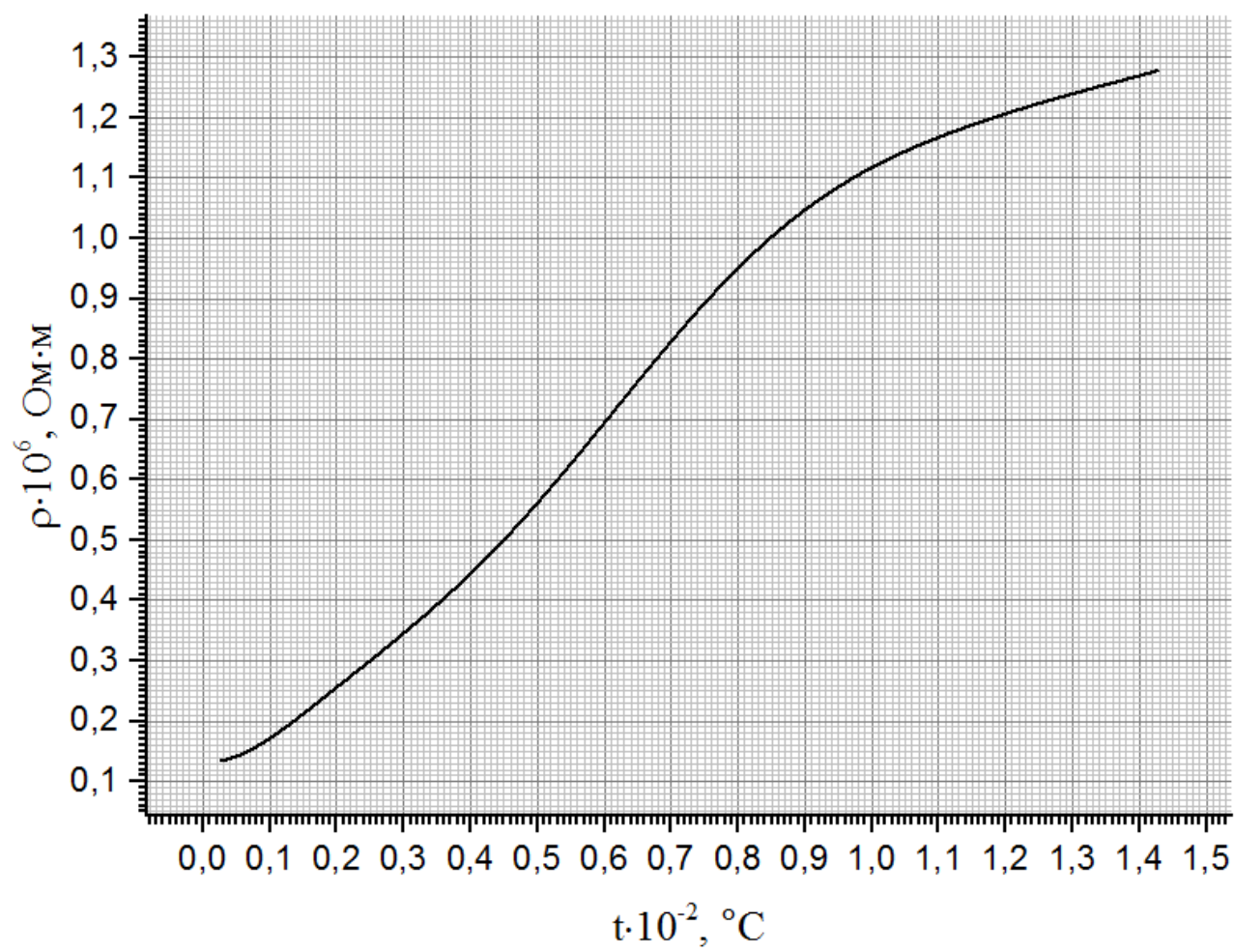
2.5 При прохождении через сопло газ должен разогнаться до скорости, выше локальной скорости звука. Нарисовать качественно форму такого сопла, если в начале скорость v_0 была меньше локальной скорости звука c . Указать, в какой точке вашего рисунка $v = c$.

Бланки к задачам

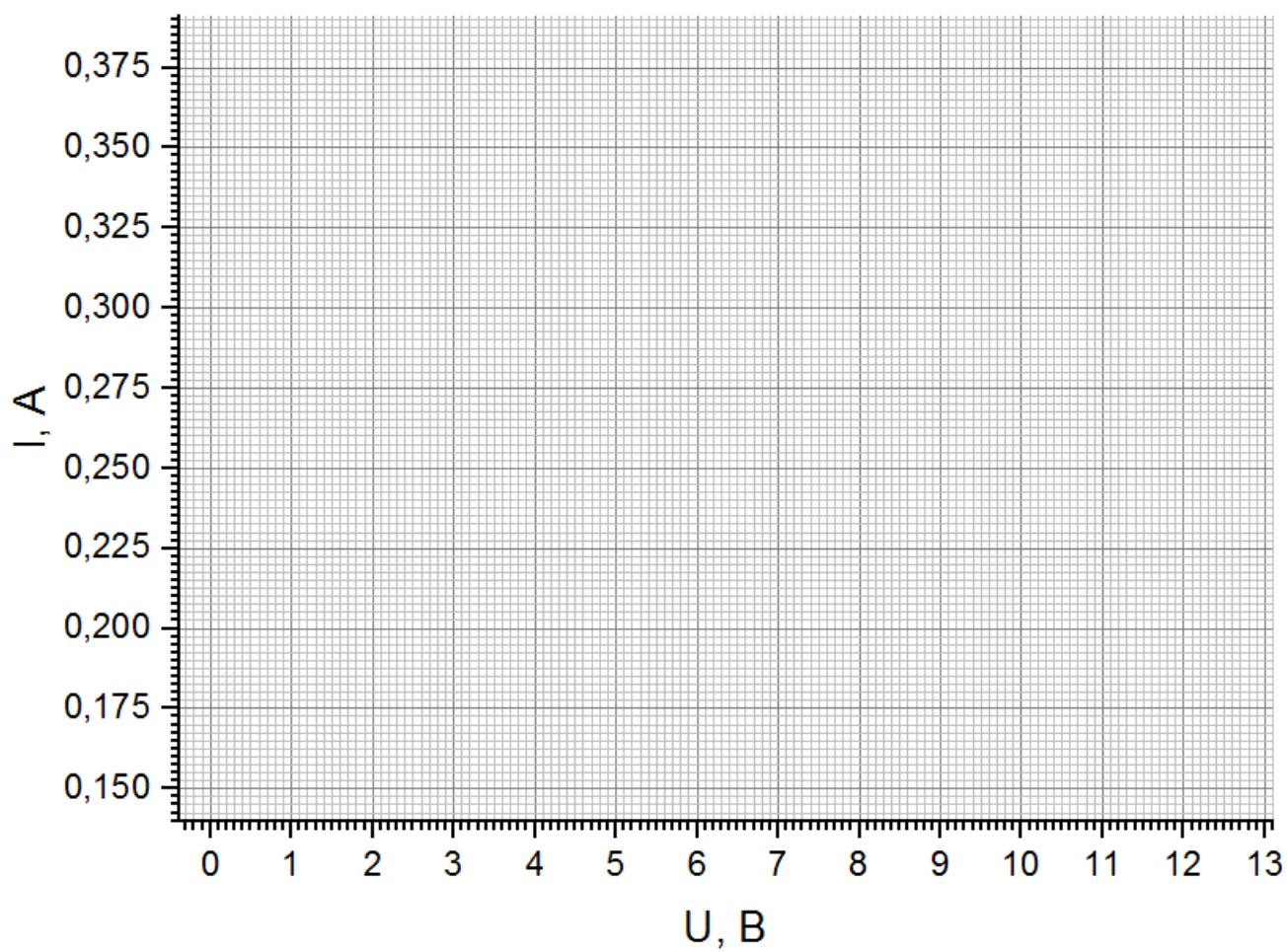
Бланк №1 К заданию 9-3 «Бареттер»



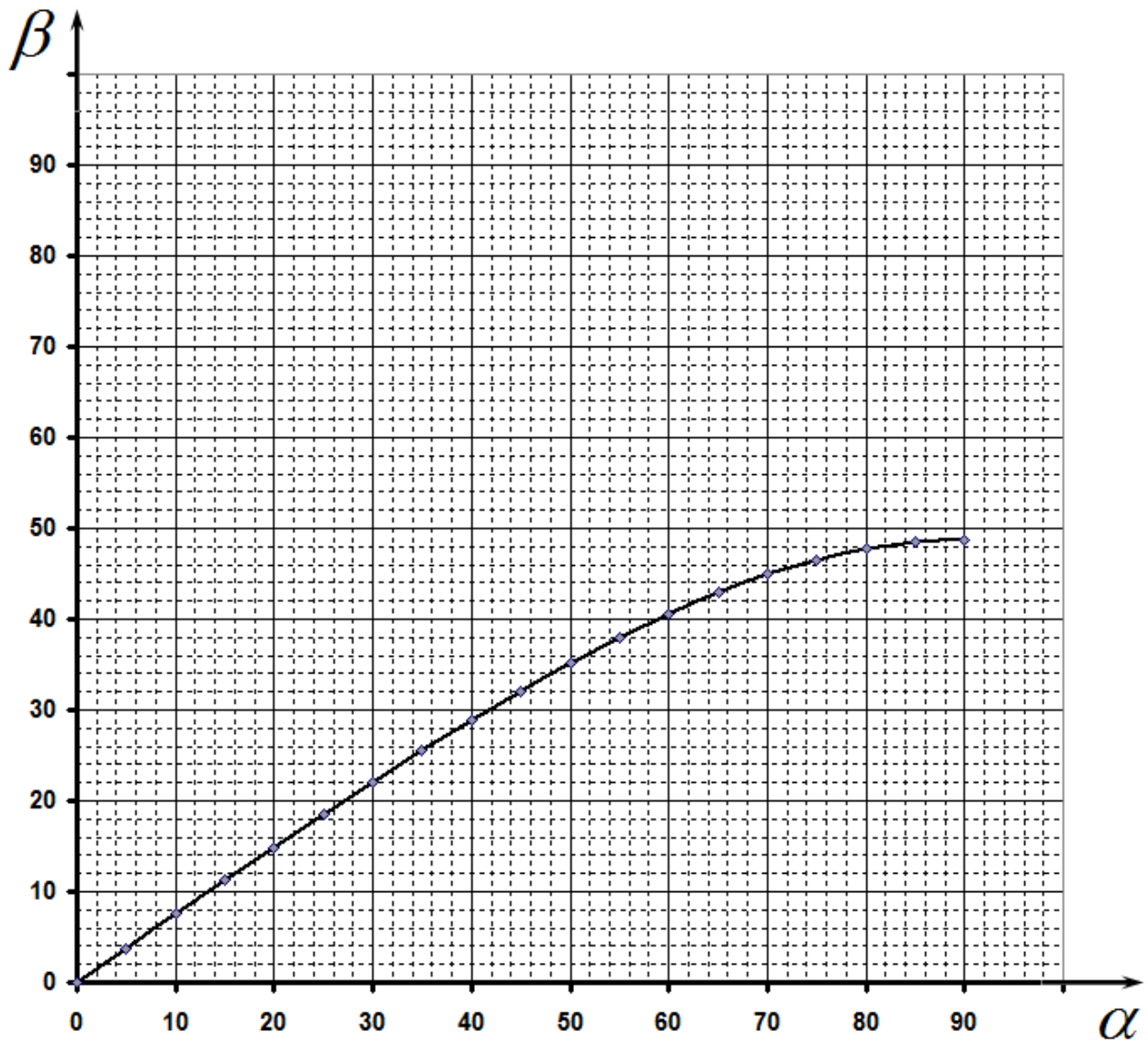
Бланк №2 к заданию 9-3 «Бареттер»



$t, ^\circ\text{C}$	$\rho \cdot 10^6, \text{ Ом} \cdot \text{М}$			
100	0,173			
200	0,257			
300	0,346			
400	0,446			
500	0,563			
600	0,695			
700	0,831			
800	0,951			
900	1,047			
1000	1,118			
1100	1,168			
1200	1,207			
1300	1,240			
1400	1,270			
1500	1,310			



Бланк к задаче 10-1-3 Водяной куб.



Решение

Задание 3. Как разгоняется газ?

Часть 1. В цилиндрической трубе.

1.1 Для определения установившегося ускорения поршней воспользуемся вторым законом Ньютона

$$ma = \Delta PS. \quad (1)$$

Здесь m - масса газа между поршнями, которая находится из уравнения состояния идеального газа

$$PV = \frac{m}{M}RT, \quad (2)$$

которое следует записать для начального состояния газа

$$P_0 S l_0 = \frac{m}{M} R T_0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{P_0 S M}{R T_0} l_0. \quad (3)$$

Тогда из уравнения (1) получим

$$a = \frac{RT}{P_0 l_0 M} \Delta P. \quad (4)$$

1.2 Для расчета зависимости давления газа от начальной координаты $P(x)$ учтем, что разность сил давлений, действующих на малую выделенную порцию газа (толщина которой в начальном состоянии равна Δx) должна обеспечивать ей ускорения, определяемое формулой (4). Так как масса этой порции может быть найдена по формуле, аналогичной формуле (3) $\Delta m = \frac{P_0 S M}{RT} \Delta x$, то искомая разность сил давлений δP может быть найдена из уравнения второго закона Ньютона для этой порции газа:

$$\Delta m a = -\delta P S \quad (5)$$

Используя выражения для массы порции и ее ускорения, получим, что

$$\frac{\delta P}{\Delta x} = -\frac{\Delta P}{l_0}. \quad (6)$$

Из этого выражения следует, что давление изменяется по линейному закону¹, который с учетом граничного условия (при $x = 0$ $P = P_0 + \Delta P$), имеет вид

$$P = P_0 + \Delta P \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \quad (7)$$

1.3 Выразим толщину слоя выделенной порции ускоренно движущегося газа через ее относительную деформацию

$$\delta x = (1 + \varepsilon) \Delta x \quad (8)$$

Так как на первом этапе установления равновесия мы пренебрегаем теплообменом между слоями, то для каждого из слоев можно применить уравнение адиабатического процесса

$$P_0 (\Delta x)^\gamma = P ((1 + \varepsilon) \Delta x)^\gamma \quad (9)$$

Так как относительные деформации равны, то к этому выражению можно применить приближенную формулу, приведенную в условии задачи, в результате получим

$$P = P_0 (1 + \varepsilon)^{-\gamma} \approx P_0 (1 - \gamma \varepsilon). \quad (10)$$

Теперь, применяя найденную зависимость (7), определим зависимость относительной деформации от координаты

$$P = P_0 + \Delta P \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) = P_0 (1 - \gamma \varepsilon) \Rightarrow \varepsilon = -\frac{\Delta P}{\gamma P_0} \left(1 - \frac{x}{l_0}\right). \quad (11)$$

1.4 Так как в использованном приближении эта зависимость линейна, то для вычисления изменения расстояния Δl_1 между поршнями можно использовать среднее значение относительной деформации, поэтому

$$\Delta l_1 = l_0 \langle \varepsilon \rangle = -\frac{\Delta P}{2\gamma P_0} l_0. \quad (12)$$

Таким образом, на этом этапе расстояние между поршнями уменьшится, т.е. газ сожмется. 1.5 Теперь температура каждого выделенного слоя может быть найдена из уравнения Клапейрона $\frac{PV}{T} = const$, которое в данном случае записывается в виде

$$\frac{P_0 S \Delta x}{T_0} = \frac{PS(1 + \varepsilon) \Delta x}{T}. \quad (13)$$

Учитывая найденные зависимости давления и относительной деформации, из этого уравнения находим

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\Delta P}{P_0} \left(1 - \frac{x}{l_0} \right) \right) \left(1 - \frac{\Delta P}{\gamma P_0} \left(1 - \frac{x}{l_0} \right) \right). \quad (14)$$

Раскрывая скобки и пренебрегая малыми величинами второго порядка, это выражение приводится к виду

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} \left(1 - \frac{x}{l_0} \right) \right) \quad (15)$$

1.6 Установившуюся температуру газа между поршнями после установления теплового равновесия следует искать из условия сохранения внутренней энергии газа. Заметим, что это возможно, так как на этом этапе мы пренебрегаем работой внешних сил. Обратим внимание, что в использованном приближении температура также изменяется по линейному закону, поэтому установившуюся температуру можно найти, взяв среднее значение изменения температуры, поэтому

$$\bar{T} = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} \right). \quad (16)$$

1.7 Для расчета изменения расстояния между поршнями после установления теплового равновесия следует применить ту же методику:

- распределение давлений определяется динамическими условиями, поэтому остается прежним и описывается формулой (7);
- установившееся распределение относительных деформаций находится из уравнения состояния газа, записанного для каждого слоя с учетом равенства их температур:

$$\begin{aligned} \frac{P_0 S \Delta x}{T_0} = \frac{PS(1 + \bar{\varepsilon}) \Delta x}{\bar{T}} &\Rightarrow 1 + \bar{\varepsilon} = \frac{\bar{T}}{T_0} \frac{P}{P_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} \right) \left(1 + \frac{\Delta P}{P_0} \left(1 - \frac{x}{l_0} \right) \right) \approx \\ &\approx 1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} + \frac{\Delta P}{P_0} \left(1 - \frac{x}{l_0} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

- средняя относительная деформация оказывается равной

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} + \frac{\Delta P}{2P_0} = \frac{2\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0}; \quad (18)$$

- наконец, изменение расстояния между поршнями становится равным

$$\Delta \bar{l}_2 = \langle \bar{\varepsilon} \rangle l_0 = \frac{2\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} l_0 \quad (19)$$

Из полученного выражения следует, что расстояние между поршнями увеличится, то есть в итоге – газ расширится!

Часть 2. В сопле переменного сечения.

2.1 Процесс расширения газа при прохождении сопла можно считать адиабатным, так как движение газа по соплу происходит достаточно быстро, а массу порции газа — постоянной:

$$pV^\gamma = \text{const}, m = \text{const} \Rightarrow p\rho^{-\gamma} = \text{const}.$$

И в результате:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}. \quad (20)$$

2.2 Используя (20), можно записать:

$$\rho + \Delta\rho = \rho_0 \left(\frac{p + \Delta p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \approx \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma} + \Delta p \frac{\rho_0}{\gamma} \frac{p^{\frac{1}{\gamma}-1}}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} \Rightarrow \Delta\rho = \Delta p \frac{\rho_0}{\gamma} \frac{p^{\frac{1}{\gamma}-1}}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} = \Delta p \frac{\rho}{\gamma p}.$$

Используя формулу локальной скорости звука, получим:

$$\Delta\rho = \frac{\Delta P}{c^2}$$

2.3 Рассмотрим слой газа небольшой толщины Δx и площади S (считаем, что площадь практически не меняется за малое Δx). Запишем второй закон Ньютона для этого слоя в проекции на ось симметрии сопла:

$$ma = -\Delta p S.$$

Считаем порцию газа достаточно малым однородным слоем площадью S и толщиной Δx :

$$m = S\rho\Delta x \Rightarrow S\rho a\Delta x = -\Delta p S \Rightarrow \rho a\Delta x = -\Delta p.$$

Учитывая, что газ пройдет расстояние Δx за промежуток времени $\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$, а скорость изменится на величину $\Delta v = a\Delta t$:

$$\Delta v = -\frac{\Delta p}{\rho v}. \quad (22)$$

2.4 Так как масса газа, проходящая через сопло в единицу времени, Q должна быть постоянной величиной, получаем, что:

$$Q_+ - Q_- = 0, \\ \rho v S - (\rho + \Delta\rho)(v + \Delta v)(S + \Delta S) = 0.$$

Пренебрегая произведениями малых величин, получаем:

$$\Delta\rho v S + \rho\Delta v S + \rho v\Delta S = 0.$$

Подставим найденные ранее выражения для изменения плотности:

$$-\frac{\Delta p \rho v}{c^2} v S + \rho\Delta v S + \rho v\Delta S = 0$$

И выразим искомое изменение скорости

$$\Delta v = \frac{v \Delta S}{S \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)} \quad (23)$$

2.5 Для этого пункта требуется анализ выражения (23). Движение газа через сопло можно разделить на три части, как это указано на рисунке:

I. $v < c$, $\Delta v > 0$, $\frac{v \Delta S}{S \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)} > 0$

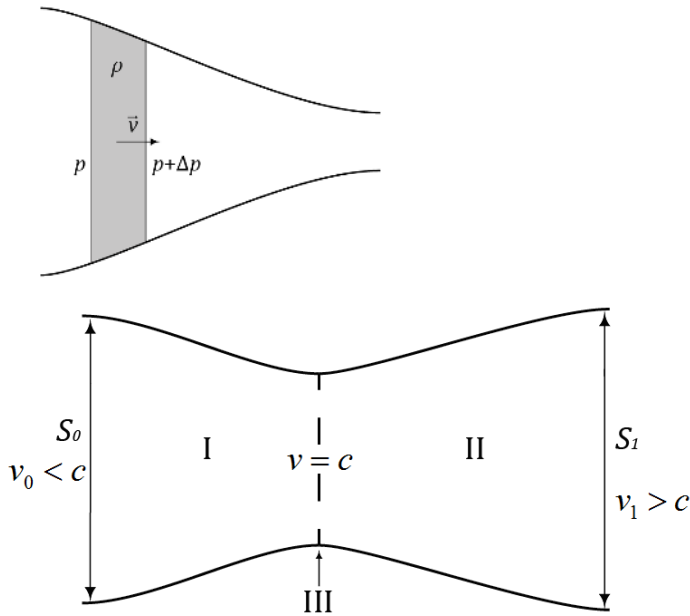
Так как знаменатель меньше единицы, мы получаем, что $\Delta S < 0$.

II. $v > c$, $\Delta v > 0$, $\frac{v \Delta S}{S \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)} > 0$

Так как знаменатель стал больше единицы, мы получаем, что $\Delta S > 0$.

III. $v = c$. Это переходная часть, где $\Delta S = 0$.

Таким образом, мы получили, что для того, чтобы газ постоянно ускорялся необходимо, чтобы сначала канал должен сужаться, а после достижения локальной скорости звука должен расширяться.



¹ Еще раз отметим, что такая линейная зависимость получена для начальных координат рассматриваемых слоев – если же рассматривать зависимость от координаты движущегося и деформированного газа эта зависимость будет гораздо сложнее!