

Сползание капель

Условие

Задание 11-1. «Сползание капель»

Оборудование: штатив с лапкой, наклонная плоскость оклеенная скотчем (доска длиной 80 – 90 см, ширина 8 – 10 см, толщина 1,5 – 2 см), шприц одноразовый без иглы (5 – 10 мл), секундомер электронный с памятью 10-ти этапов, мерная лента, линейка (30 – 40 см), маркер (черный или синий), салфетки бумажные (20 шт), рафинированное растительное масло (80 – 100 мл), вода (100 – 150 мл), стаканы одноразовые пластмассовые (2 шт), скотч (ширина 2 см), пластиковый контейнер (250 – 500 мл, для использованных салфеток).

Внимание участников олимпиады!!! В шприц набирать только воду! Пальцы, вымазанные растительным маслом, не облизывать. Со стороны это выглядит очень не красиво. Руки вытирайте салфетками.

Указания для организаторов экспериментального тура.

Доску, которая будет использоваться в качестве наклонной плоскости обязательно с одной стороны оклеить скотчем. Оклеивание обязательно производить вдоль доски. Для оклеивания использовать широкий скотч (5 – 6 см шириной, можно шире). Оклеенная поверхность не должна иметь складок, морщин и пузырьков воздуха. По обоим краям наклонной плоскости обязательно сделать «бортики», проклеить друг на друга вдоль всей доски с обеих сторон по 3 - 4 полосы узкого скотча (ширина 2 см).

Без указанной подготовки наклонных плоскостей учащиеся не смогут качественно провести эксперимент по данной задаче.

Часть 1. Теоретическая

Известно, что сила вязкого трения и скорость движения тела в вязкой среде связаны соотношением

$$F_c = kv^\alpha \quad (1)$$

В данной задаче Вам предстоит исследовать движение капель по наклонной плоскости покрытой тонким слоем растительного масла.

1.1 Покажите, что в случае равномерного движения капли по наклонной плоскости скорость движения капли v зависит от высоты верхнего края плоскости над горизонтальной поверхностью H в соответствии с уравнением (2). Длину наклонной плоскости L , массу капли m , коэффициент k и показатель степени α в уравнении (1) считайте известными.

$$v = cH^\beta \quad (2).$$

$$v = cH^\beta. \quad (2)$$

1.2 Получите выражение для коэффициента c в уравнении (2). **1.3** Получите выражение для показателя степени β в уравнении (2).

Часть 2. Экспериментальная

С начала Вам необходимо привести экспериментальную установку в соответствие с условиями задачи. По краю наклонной плоскости со стороны, оклеенной скотчем, нанесите маркером деления через 5,0 см. Начальное деление — 0, последнее деление — 60 см. Деление нанесите так, чтобы расстояние от нулевого деления до ближайшего торца доски и от последнего деления до ближайшего к нему торца доски были примерно одинаковыми. Если нанесённые метки вытираются, то заклейте их скотчем (заклеивайте сплошной полосой по всей длине доски). По обоим краям наклонной плоскости должны быть

«бортики» (3 – 4 полосы скотча, шириной 2 см, приклеенные друг на друга по всей длине доски). С помощью бумажной салфетки постройте наклонную плоскость между бортиками по всей длине тонким слоем растительного масла. Капли на наклонную плоскость наносите с помощью одноразового шприца.

Абсолютные и относительные погрешности косвенных измерений в данной задаче вычислять не требуется.

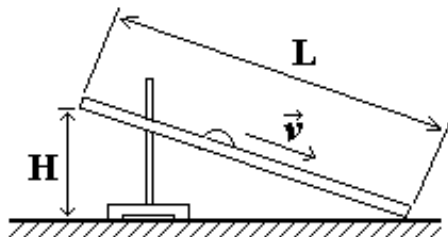
2.1 Установите верхний край наклонной плоскости на высоте 10 – 15 см над горизонтальной поверхностью. Исследуйте экспериментально зависимость координаты капли воды от времени её движения по наклонной плоскости, покрытой тонким слоем растительного масла. Получите по экспериментальным данным уравнение зависимости координаты капли от времени её движения.

2.2 Исследуйте экспериментально зависимость $v(H)$ скорости движения капли воды по наклонной плоскости, покрытой тонким слоем растительного масла, от высоты верхнего края плоскости над горизонтальной поверхностью. Покажите, что данная зависимость соответствует уравнению (2).

2.3 По данным Вашего эксперимента определите значения показателей степеней α и β .

2.4 Используя результаты Вашего исследования, запишите зависимость $v(H)$ в виде уравнения (2).

$$F_c = kv^\alpha \quad (1)$$



Решение

Задача 11-1. «Сползание капель»

Часть 1. Теоретическая

1.1 На рисунке изображены силы, действующие на каплю в процессе ее движения. Так как сила сопротивления зависит от скорости по закону

$$F_c = kv^\alpha \quad (1)$$

И направлена в сторону противоположную вектору скорости $\vec{v}$, то после небольшого этапа разгона капля будет двигаться с постоянной скоростью. В этом случае проекция силы тяжести на наклонную поверхность $mg \sin \gamma$ будет уравновешена силой сопротивления. Поэтому в этом случае будет выполняться соотношение

$$mg \sin \gamma = kv^\alpha. \quad (2)$$

Учитывая, что $\sin \gamma = \frac{H}{L}$, из выражения (2) получим связь между скоростью капли и высотой подъема плоскости

$$v = \left(\frac{mg}{kL} H \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (2)$$

1.2 – 1.3 Сравнивая с формулой, приведенной в условии $v = cH^\beta$, получаем, что параметры этого выражения равны

$$\beta = \frac{1}{\alpha}, \quad c = \left(\frac{mg}{kL} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (3)$$

Часть 2. Экспериментальная

2.1 Результаты измерений зависимости времен t сползания капли на расстояние X приведены в таблице 1. Измерения проведены 5 раз, затем рассчитано среднее значение соответствующий времен $\langle t \rangle$. В последнем столбце приведены значения случайных ошибок измерения времен (по условию задачи их расчет не требуется).

Таблица 1.

$X, \text{ м}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$	$t_4, \text{ с}$	$t_5, \text{ с}$	$\langle t \rangle, \text{ с}$	$\Delta t, \text{ с}$
0,05	2,59	2,76	2,54	2,81	2,62	2,66	0,14
0,10	4,97	5,34	5,02	5,54	5,28	5,23	0,29
0,15	7,32	8,03	7,66	8,24	7,81	7,81	0,44
0,20	10,4	10,6	10,3	9,9	10,5	10,34	0,33
0,25	11,2	13,5	12,6	14,2	13,1	12,92	1,40
0,30	13,9	15,8	15,3	16,7	15,6	15,46	1,26
0,35	16,3	18,0	17,8	19,4	18,2	17,94	1,38
0,40	18,9	21,0	20,1	22,5	20,9	20,68	1,64
0,45	22,3	23,3	22,8	24,9	23,6	23,38	1,22
0,50	25,4	26,4	25,6	27,8	26,7	26,38	1,19

Усредненный график закона движения (зависимости координаты капли от времени) приведен на рисунке.

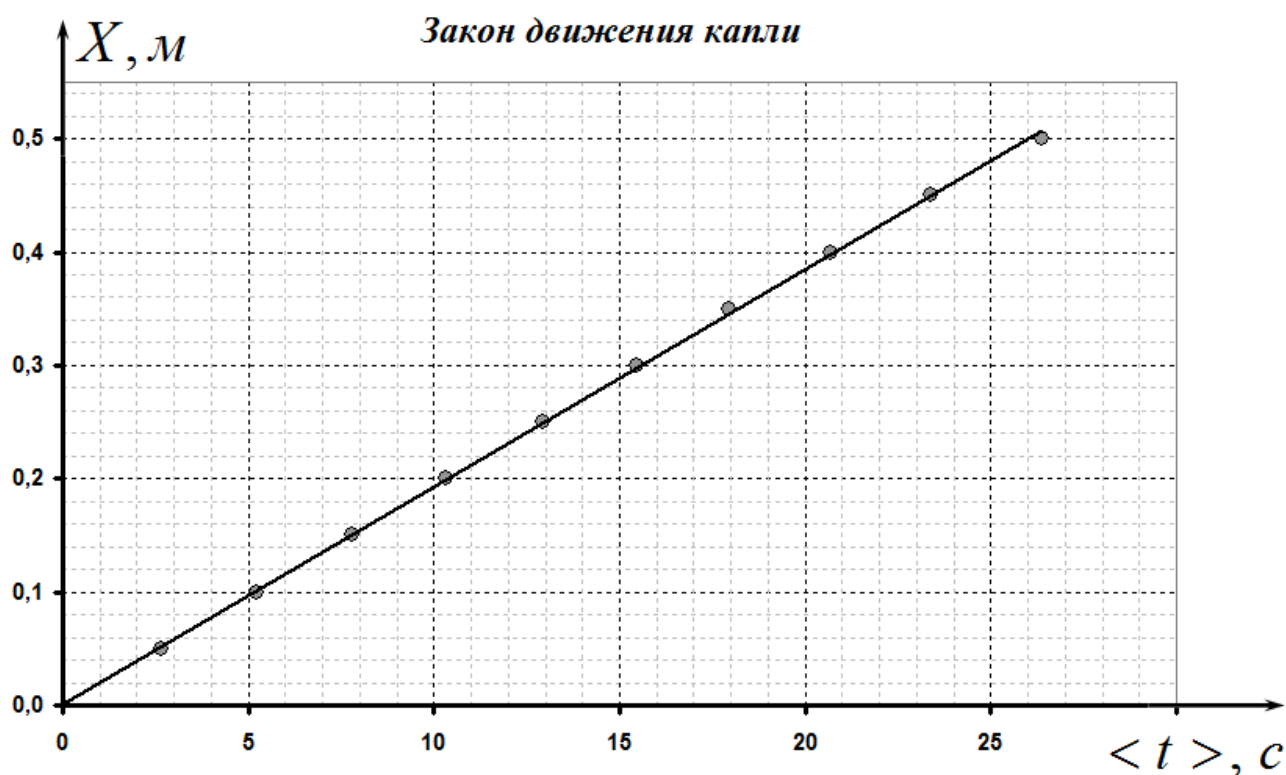


График представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат, следовательно, движение капли является равномерным. Следовательно, закон движение описывается функцией

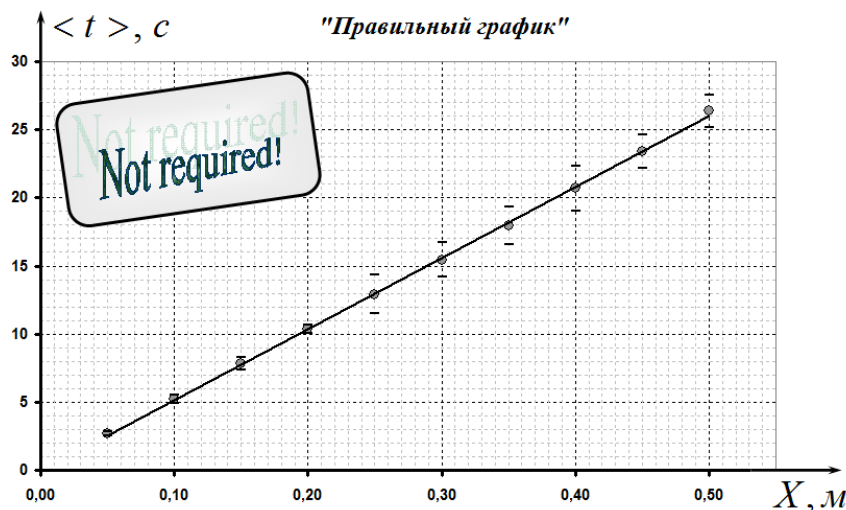
$$X = vt. \quad (4)$$

По графику (с помощью МНК, или графически) легко найти скорость движения, которая равна коэффициенту наклона графика:

$$v = 0,019 \frac{M}{c}. \quad (5)$$

Необязательное дополнение.

Наличие повторных измерений позволяет построить более информативный график, с нанесенными диапазонами погрешностей измерений. Он показывает, что полученная зависимость действительно отлично описывается линейной функцией.



2.2 Для исследования зависимости скорости движения капли, от высоты края наклонной плоскости $v(H)$ следует провести измерения времени смещения капли t (конечно, измерения следует проводить несколько раз, а затем рассчитать среднее значение $\langle t \rangle$) на заданной измеренной расстоянии L . Тогда скорость капли рассчитывается по формуле

$$v = \frac{L}{\langle t \rangle}. \quad (6)$$

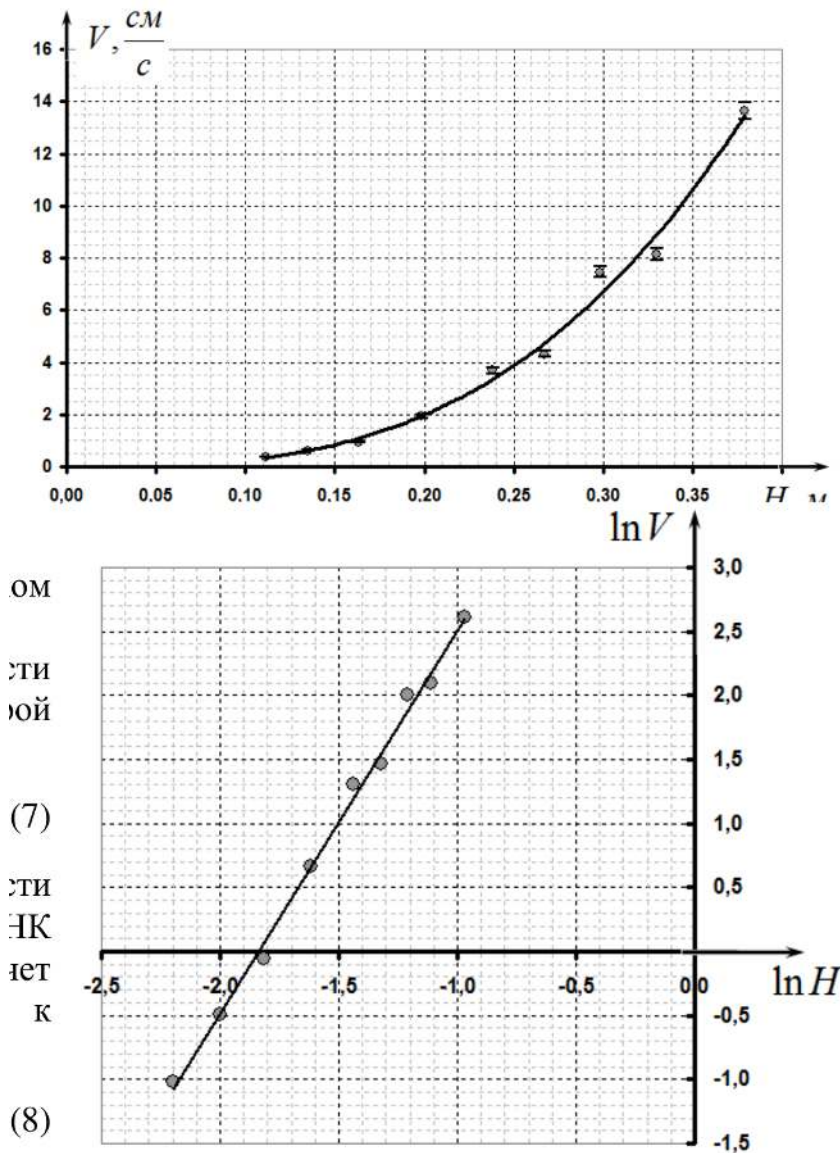
Результаты измерения времен сползания каплей при разных высотах наклонной плоскости приведены в таблице 2. Для каждой высоты H поведено 5 измерений t_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) и рассчитано среднее значение этого времени $\langle t \rangle$. Также обратите внимание, что измерения проведены для разных значений пройденного пути L

Таблица 2

		Время движения								
H, м	**L, м**	**t ₁ , с**	**t ₂ , с**	**t ₃ , с**	**t ₄ , с**	**t ₅ , с**	**⟨t⟩, с**	**v, $\frac{cm}{c}$ **	**ln H**	**ln V**
0,111	0,10	26,80	28,00	28,60	27,40	27,10	27,58	0,36	-2,198	-1,015
0,135	0,10	16,60	15,90	16,80	16,90	15,70	16,38	0,61	-2,002	-0,493
0,163	0,20	21,20	20,70	20,80	22,10	21,50	21,26	0,94	-1,814	-0,061
0,198	0,20	10,40	10,60	10,30	9,92	10,50	10,34	1,93	-1,619	0,659
0,238	0,30	8,36	8,19	7,81	8,01	8,26	8,13	3,69	-1,435	1,306
0,267	0,30	6,80	6,94	7,16	6,78	7,06	6,95	4,32	-1,321	1,463
0,298	0,60	8,10	8,16	7,90	7,82	8,24	8,04	7,46	-1,211	2,009
0,330	0,60	7,12	7,40	7,25	7,55	7,46	7,36	8,16	-1,109	2,099
0,379	0,60	4,36	4,41	4,29	4,52	4,38	4,39	13,66	-0,970	2,615

График зависимости скорости капли от высоты H показан на рисунке. На этом графике также указаны погрешности измерения скоростей движения. Видно, что полученная зависимость

является не линейной. Однако визуально определить вид функциональной зависимости затруднительно. Поэтому данный график не является обязательным. Для проверки применимости функции (2) для описания полученных результатов необходимо данный график построить в двойном логарифмическом масштабе.



Линейность этой зависимости подтверждает формулу (2), из которой следует, что

$$\ln v = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{mg}{kL} + \frac{1}{\alpha} \ln H \quad (7)$$

Параметры линейной зависимости $\ln v = a \ln H + b$, рассчитанные по МНК имеют следующие значения (расчет погрешностей по условию задачи, к сожалению не требуется):

$$\begin{aligned} a &= 2,99 \pm 0,16 \\ b &= 5,5 \pm 0,3 \end{aligned} \quad (8)$$

С высокой степенью точности можно считать, что показатель степени $\beta = \frac{1}{\alpha} = 3$, соответственно, $\alpha = \frac{1}{3}$. Найденные значения параметров зависимости в двойной логарифмической шкале позволяют записать явный вид функции (2)

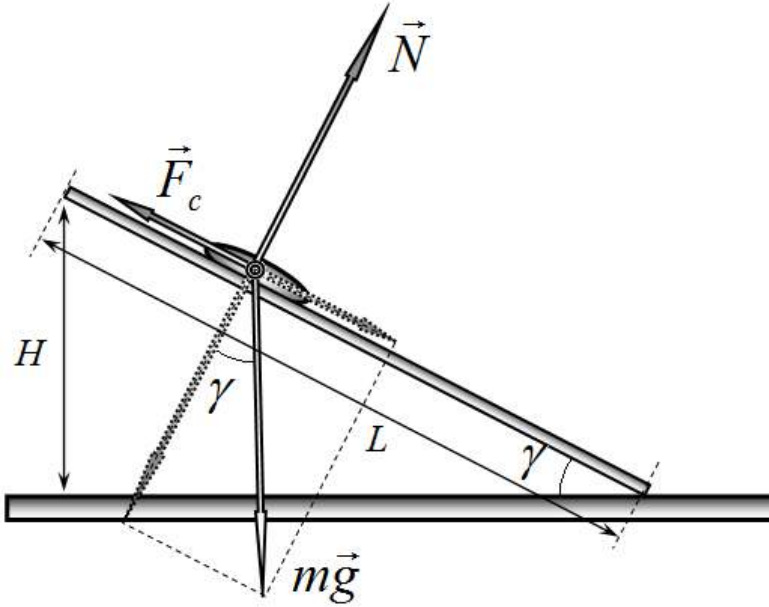
$$v = \exp(a \ln H + b) = \exp(b) \cdot H^a = 2,46 \cdot H^3 \quad (9)$$

Здесь H измеряется в мерах, скорость v в м/с.

Обратим также внимание на удивительный факт: зависимость силы сопротивления от скорости имеет неожиданный вид

$$F_c = k\sqrt[3]{v} \quad (10)$$

Теоретическое обоснование полученного результата требует отдельных исследований, что не входит в задачу экспериментального тура.



¹ Строго говоря, в данном случае проведение сглаживающей прямой в данном случае не имеет смысла, так аргумент этой функции изменяется дискретно. Но мы провели ее, для наглядности, как иллюстрацию линейной зависимости.