

Условие

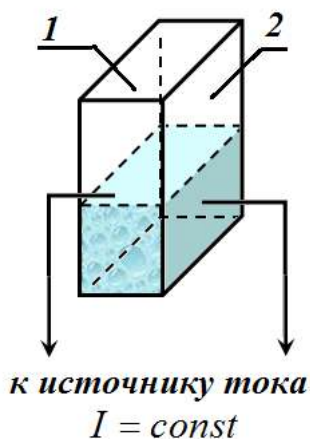
Задача 10 - 1. Подобие

Задание состоит из 3 независимых задач.

1.1 Время падения камня с башни, расположенной на поверхности Земли равно τ . Чему будет равно время падения камня с такой же башни, находящейся на другой планете, радиус которой в два раза меньше радиуса Земли? Считайте, что средняя плотность планеты равна средней плотности Земли. Высота башни значительно меньше радиусов планет, сопротивление воздуха не учитывать.

1.2 После установления стабильной морозной погоды на озере стал образовываться лед. За неделю толщина образовавшегося льда стала равной 10 см. Чему будет равна толщина льда еще через одну неделю?

1.3 В ванну, имеющей форму параллелепипеда, залита проводящая жидкость. Грани ванны, обозначенные на рис. 1 и 2 являются хорошими проводниками, подключены к источнику постоянного тока. Источник создает в цепи электрический ток, сила которого постоянна ($I = \text{const}$) и не зависит от сопротивления подключенной цепи. Через некоторое время после подключения ванны к источнику жидкость в ванне закипела. Через время τ_0 после начала кипения уровень жидкости уменьшился в два раза (из-за выкипания). Через какое время после этого жидкость в ванне выкипит полностью?



Подсказка. Возможно, Вам понадобится хорошо известная формула. При изменении некоторой величины x на малую величину Δx справедливо соотношение

$$x\Delta x = \frac{1}{2}\Delta(x^2)$$

Решение

Задача 10 - 1. Подобие

1.1 Время падения легко рассчитывается по формуле

$$h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1)$$

Теперь необходимо выразить ускорение свободного падения на планете через ее радиус. По известным формулам:

$$g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi\rho R^3}{R^2} = \frac{4}{3}G\pi\rho R. \quad (2)$$

Таким образом, ускорение на меньшей планете в два раза меньше ускорения свободного падения на Земле. Следовательно, время падения в соответствии с формулой (1) увеличится в $\sqrt{2}$ раз, т.е.

$$\tau_1 = \frac{\tau}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

1.2 Теплота, выделяющаяся при замерзании воды на нижней поверхности льда должна пройти через слой льда. Поток теплоты, очевидно, обратно пропорционален толщине льда. Поэтому время намерзания Δt слоя малой толщины Δh связано уравнением теплового баланса

$$\Delta h = \frac{\beta}{h} \Delta t. \quad (1)$$

Где β постоянная величина, зависящая от удельной теплоты кристаллизации, теплопроводности, температуры воздуха. Из уравнения (1) с учетом подсказки следует, что

$$h^2 = 2\beta t. \quad (2)$$

Из этого уравнения видим, что при увеличении времени в два раза толщина возрастает в $\sqrt{2}$ раз. Таким образом, толщина льда станет равной

$$h_1 = \sqrt{2}h = 14 \text{ см} \quad (3)$$

1.3 Изменение высоты слоя пропорционально количеству теплоты, выделяющейся при прохождении электрического тока, которое в свою очередь (при постоянной силе тока) пропорционально сопротивлению слоя, т.е.

$$\Delta h = -\frac{\beta}{h} \Delta t, \quad (1)$$

Где β постоянная величина, зависящая от удельной теплоты размеров ванны, удельного сопротивления и удельной теплоты испарения жидкости, силы проходящего тока. Из уравнения (1) следует, что

$$\Delta h = -\frac{\beta}{h} \Delta t \Rightarrow \Delta(h^2) = -2\beta t \Rightarrow h^2 - h_0^2 = -2\beta t. \quad (2)$$

Для времени τ_0 получим

$$\left(\frac{h_0}{2}\right)^2 - h_0^2 = -2\beta t \Rightarrow \frac{3}{4}h_0^2 = 2\beta\tau_0. \quad (3)$$

Для времени полного выкипания

$$h_0^2 = 2\beta\tau_1. \quad (4)$$

Из этих выражений следует, что $\tau_1 = \frac{4}{3}\tau_0$. Поэтому все жидкость выкипит через время

$$\tau = \tau_1 - \tau_0 = \frac{\tau_0}{3}$$