

Условие

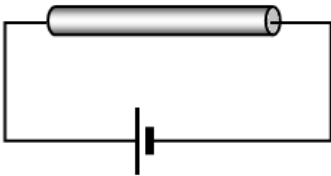
Задача 9-1. Подобие

Задание состоит из 3 независимых задач.

1.1 Восточный падишах приказал своему скульптору изготовить золотой бюст. Скульптор выполнил заказ. Падишаху бюст понравился, но показался слишком маленьким, поэтому он дал команду изготовить такой же бюст, но в два раза больший по высоте. Во сколько раз стоимость второго бюста больше стоимости первого? *Считайте, что стоимость бюста равна стоимости золота, которое пошло на его изготовление.*

1.2 Воздушный шар радиуса 10 м парит в воздухе. Во сколько раз изменится суммарная сила атмосферного давления на шар, если его радиус увеличить в два раза?

1.3 Проводящий тонкий цилиндрический стержень, подключенный к источнику постоянного напряжения, находится в воздухе, температура которого равна $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$. По прошествии некоторого времени стержень нагрелся до температуры $t_1 = 10^\circ\text{C}$, после чего его температура оставалась постоянной. К этому же источнику подключают другой стержень, изготовленный из того же материала, но все линейные размеры которого в два раза больше первого. Определите установившуюся температуру второго стержня. *Считайте, что удельное сопротивление стержня от температуры не зависит. Длина стержня значительно больше его радиуса.*



Решение

Задача 9-1. Подобие

1.1 Очевидно, что при увеличении линейных размеров бюста в 2 раза, его объем, масса и стоимость возрастут в 8 раз.

1.2 Суммарная сила атмосферного давления есть сила Архимеда, которая пропорциональна объему шара. Следовательно, при увеличении радиуса в 2 раза, сила давления воздуха возрастет в 8 раз. Здесь учтено, что при заданном радиусе шара можно пренебречь изменением плотности воздуха на высотах равных, диаметру шара.

1.3 Когда температура стержня установилась, количество теплоты, выделяющейся при прохождении тока, станет равным количеству теплоты, уходящей в окружающий воздух. Мощность выделяющейся теплоты определяется законом Джоуля – Ленца, который при постоянном напряжении имеет вид

$$P_+ = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{\rho \frac{l}{\pi r^2}} = \frac{U^2 \pi r^2}{\rho l}. \quad (1)$$

Разумно предположить, что мощность теплоты, уносимой в воздух пропорционально площади боковой поверхности стержня и разности температур стержня и окружающей среды:

$$P_- = \alpha \cdot 2\pi r l \Delta t \quad (2)$$

Приравнивая эти мощности, найдем температуру стержня (учитывая, что температура воздуха равна нулю):

$$\frac{U^2}{\rho} \frac{\pi r^2}{l} = \alpha \cdot 2\pi r l \Delta t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{U^2}{\rho} \frac{\pi r^2}{l} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot 2\pi r l} = \frac{U^2}{2\alpha\rho} \frac{r}{l^2}. \quad (3)$$

Из этой формулы следует, что при увеличении размеров стержня в 2 раза температура стержня уменьшится в 2 раза, т.е. станет равной $t_2 = 5,0^\circ C$.

Решения задач