

## Условие

### Задача 9-3. Обогрев дома.

Республика Беларусь тратит значительно количество энергии на обогрев помещений. Экономия ресурсов, затрачиваемых на отопление, является важной государственной проблемой. В данной задаче Вам необходимо рассмотреть некоторые возможности уменьшения расходов на поддержание комфортных температур в жилых помещениях.

При решении задачи вам понадобится закон теплопроводности (сформулированный французским физиком Ш. Фурье). В упрощенной форме он формулируется следующим образом. Пусть одна сторона плоскопараллельной пластины толщиной  $h$  поддерживается при постоянной температуре  $t_1$ , а вторая при температуре  $t_2$ . Тогда плотность потока теплоты  $q$  через пластину пропорционален разности температур и обратно пропорционален толщине пластины

$$q = \lambda \frac{t_1 - t_2}{h}, \quad (1)$$

Коэффициент пропорциональности зависит только от материала пластины и называется **теплопроводностью** материала.

Плотностью потока теплоты называется количество теплоты, которое перетекает через площадку единичной площади в единицу времени (чтобы избежать путаницы в данной задаче температуру будем обозначать  $t$ , а время  $\tau$ )

$$q = \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta \tau} \quad (2)$$

*Справочные данные:*

|                         | Плотность                                              | Удельная теплоемкость                                    | Теплопроводность                                                          |
|-------------------------|--------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| Воздух                  | $\rho_0 = 1,2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$            | $c_0 = 1,0 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$  | $\lambda_0 = 2,4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ |
| Бетон                   | $\rho_1 = 2,2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ | $c_1 = 0,92 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ | $\lambda_1 = 1,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$               |
| Утеплитель (стекловата) |                                                        |                                                          | $\lambda_2 = 6,0 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ |

*Примечание.* Плотность, теплоемкость и теплопроводность воздуха зависят от температуры и давления. Однако, в данной задаче этими зависимостями следует пренебречь и использовать приведенные в таблице средние значения.

#### Часть 1. Бетонная коробка.

Основу дома является бетонная коробка, внутренние размеры которой  $a \times b \times H = 6,0 \times 6,0 \times 2,5$  м. Толщина стен, пола и потолка равна  $h = 20$  см.

1.1 Рассчитайте массу бетона, из которого изготовлена коробка. 1.2 Рассчитайте теплоемкость коробки  $C_1$ . 1.3 Оцените массу воздуха внутри дома и его теплоемкость  $C_0$ .

Теплоемкостью тела  $C$  (не путайте с удельной теплоемкостью вещества) называется количество теплоты, которое требуется, чтобы нагреть тело на  $1^\circ$ .

**Влиянием окон и дверей на потери теплоты можно пренебречь. Пол и потолок дома хорошо теплоизолированы (потолок поверх слоя бетона, а пол снизу слоя бетона), поэтому потери теплоты проходят только через стены дома.**

#### Часть 2. Обогрев без утеплителя

В данной части задачи рассматриваются возможности обогрева рассмотренного в Части 1. Для обогрева дома используется печь, работающая на дизельном топливе. Коэффициент полезного действия печи приемлем равным 70% (т.е. 30% выделяемой теплоты улетает «в трубу»). Максимальная полезная мощность печи равна  $P_0 = 10$  кВт.

2.1 Рассчитайте стоимость ( $s_0 \frac{\text{руб}}{\text{Дж}}$ ) 1 Джоуля теплоты, идущего на нагревание дома.

Плотность дизельного топлива  $\rho = 860 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , удельная теплота его сгорания  $q = 43 \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}$ , цена 1 литра топлива 1,2 руб.

**2.2** Пусть мощность теплоты идущей на обогрев комнаты равна  $P$ , температура наружного воздуха  $t_0$ . Получите формулу для установившейся температуры воздуха внутри дома  $t_1$ .

*\*Считайте, что температура поверхности стен внутри дома равна  $t_1$ , а снаружи -  $t_0$ . Для передачи теплоты от стен к наружному воздуху температура стены должна быть немного выше, чем температура воздуха. Однако эта разность обычно мала и ею можно пренебречь.*

**2.3** Пусть средняя температура наружного воздуха равна  $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$ . Какова должна быть мощность теплоты  $P_1$ , идущей на обогрев, что бы температура воздуха внутри дома была равна  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ ? Рассчитайте стоимость дизельного топлива, которое потребуется на обогрев дома в течение суток.

**2.4** Рассмотрим разогрев дома. Пусть начальная температура воздуха в доме и температура стен равна температуре наружного воздуха  $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$ . Печь разжигают. Рассчитайте: - количество теплоты, которое пойдет на разогрев воздуха в комнате до температуры  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ ; - количество теплоты, которое пойдет на нагревание стен, потолка и пола до достижения установившейся температуры; - стоимость «разогрева» дома в рублях. Оцените время разогрева дома до установившейся температуры. Если мощность печи равна максимальной полезной мощности печи  $P_0 = 10\text{кВт}$ .

### Часть 3. Утепление

Пусть теплота перетекает через некоторый слой вещества. На основании закона Фурье можно записать, что плотность потока теплоты через слой выражается формулой

$$q = \alpha \Delta t, \quad (3)$$

где коэффициент  $\alpha$  (назовем ее тепловой проводимостью) зависит от материала слоя и его толщины,  $\Delta t$  - разность температур на границах слоя.

**3.1** Рассчитайте численное значение коэффициента  $\alpha$  для бетонной стены рассматриваемого дома.

**3.2** Пусть теплота протекает через два параллельных слоя, тепловые проводимости которых равны  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Покажите, что плотность потока теплоты через составной слой может быть записана в виде

$$q = \alpha(t_1 - t_2) \quad (4)$$

Выразите значение коэффициента  $\alpha$  для составного слоя, через значения коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Для уменьшения расходов стены дома утепляют, покрывая их слоем утеплителя (стекловаты), толщиной  $h_2 = 10$  см.

**3.3** Какова должна быть мощность теплоты  $P_2$ , идущей на обогрев дома, чтобы поддерживать внутри постоянную температуру  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  при температуре наружного воздуха  $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$ .

**3.4** Во сколько раз уменьшаться финансовые расходы на поддержание температуры в доме.

**3.5** Оцените время и стоимость «разогрева» утепленного дома от  $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$  до установившейся температуры  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ , если включить печь на максимальную полезную мощность  $P_0 = 10$  кВт.

**3.6** Допустим, что житель города наезжает в свой загородный дом (рассматриваемый в данной задаче) только на выходные дни. Дайте совет — что экономически выгоднее, разогревать дом по приезду в субботу, или поддерживать его установившуюся температуру в течение будних дней?

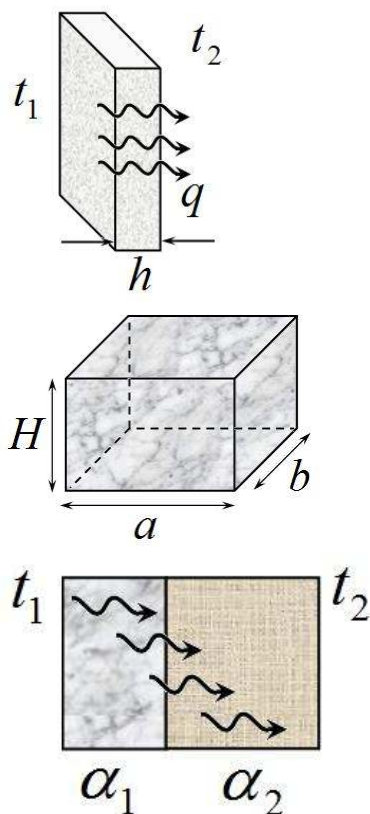
УТВЕРЖДАЮ Заместитель председателя оргкомитета заключительного этапа Республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Р.С.Сидоренко «\_\_\_» декабря 2016 г.



Республиканская физическая олимпиада  
2017 год.

(III этап)

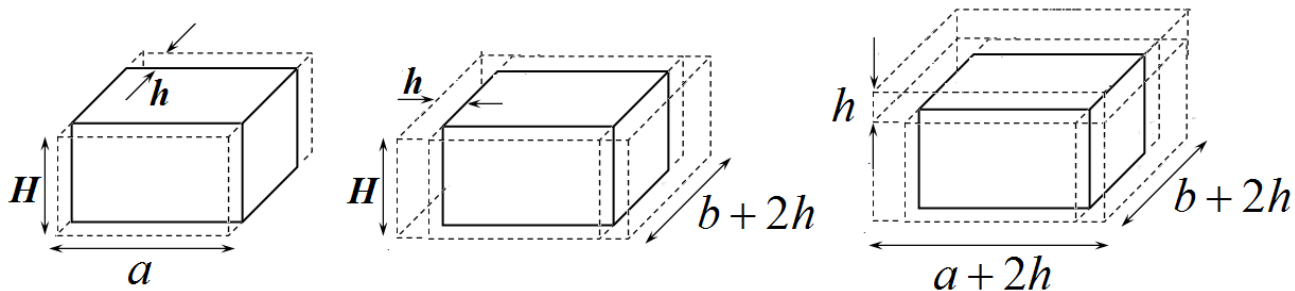
Теоретический тур



Решение

Задача 9-3. Обогрев дома.

1.1 – 1.2 Рассчитаем объем бетона (с правильным учетом углов дома):



Две стены:

$$V_1 = 2aHh;$$

Еще две стены:

$$V_2 = 2(b + 2h)Hh;$$

Потолок и пол:

$$V_3 = 2(a + 2h)(b + 2h)h.$$

Подстановка численных значений и вычисления приводят к следующему результату (округление проведено с одной запасной цифрой)

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 28,8 \text{ м}^3.$$

Масса бетона

$$m_1 = \rho_1 V = 6,3 \cdot 10^4 \text{ кг} \quad (1)$$

Его теплоемкость

$$C_1 = c_1 m_1 = 5,8 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \quad (2)$$

**2.4 -1.4** Масса воздуха и его теплоемкость рассчитывается по формулам

$$m_0 = abH\rho_0 = 108 \text{ кг} \quad (3)$$

$$C_0 = c_0 m_0 = 108 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \quad (4)$$

**2.4** При сгорании 1 литра дизельного топлива выделяется количество теплоты

$$Q_0 = \rho V q = 860 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot 43 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} = 3,7 \cdot 10^7 \text{ Дж}.$$

Из этого количества на обогрев дома пойдет

$$Q_1 = \eta Q_0 = 2,6 \cdot 10^7 \text{ Дж}.$$

Стоимость этой теплоты равна 1,2 рубля, следовательно, стоимость одного джоуля теплоты равна

$$s_0 = \frac{1,2 \text{ руб}}{2,6 \cdot 10^7 \text{ Дж}} = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\text{Дж}}. \quad (5)$$

Т.е. приближенно 5 микрокопеек.

**2.4** В установившемся режиме, количество теплоты, поступающей от нагревателя равно, количеству теплоты, уходящей через стены, поэтому

$$P = \lambda_1 \frac{t_1 - t_0}{h} S = \frac{4aH}{h} \lambda_1 (t_1 - t_0). \quad (5)$$

Где  $S = 4aH$  - площадь стен. Из этого соотношения следует

$$t_1 = t_0 + \frac{h}{4aH\lambda_1} P. \quad (5)$$

**2.3** Используя формулу (4), найдем

$$P_0 = \lambda_1 \frac{t_1 - t_0}{h} S = \frac{4aH}{h} \lambda_1 (t_1 - t_0) = 7,2 \cdot 10^3 \text{ Вт} = 7,2 \text{ кВт}. \quad (6)$$

Стоимость требуемого в течение суток топлива равна руб  $S = P \tau = 7,2 \cdot 10^3 \text{ Вт} \cdot (24 \cdot 3600) \text{ с} = 29 \text{ руб.}$   
(7) 00 Дж

$$S = s_0 P_0 \tau = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\Delta \mathcal{K}} \cdot 7,2 \cdot 10^3 \text{ Вт} \cdot (24 \cdot 3600) \text{ с} = 29 \frac{\text{руб}}{\Delta \mathcal{K}}. \quad (7)$$

**2.4** Рассмотрим разогрев дома. Пусть начальная температура воздуха в доме и температура стен равна температуре наружного воздуха  $t_0 = 0,0^\circ \text{C}$ . Печь разжигают. Количество теплоты, которое пойдет на разогрев воздуха в комнате, равно

$$Q_0 = C_0(t_1 - t_0) = 108 \cdot 20 = 2,2 \cdot 10^3 \Delta \mathcal{K}. \quad (8)$$

Для расчета количества теплоты, которое пойдет на нагревание стен до достижения установившейся температуры, следует учесть, что температура внутри стен линейно изменяется от  $t_1 = 20^\circ \text{C}$  до  $t_0 = 0,0^\circ \text{C}$ . Поэтому на разогрев стен потребуется количество теплоты равное

$$Q_{\text{ст}} = 4aHh\rho_1 c_1 \frac{t_1}{2} = 4 \cdot 6,0 \cdot 2,5 \cdot 0,20 \cdot 2,2 \cdot 10^3 \cdot 0,92 \cdot 10^3 \cdot 10 = 2,4 \cdot 10^8 \Delta \mathcal{K}.$$

Потолок и пол должны полностью нагреться до температуры  $t_1 = 20^\circ \text{C}$ . Требуемое на это количество теплоты равно

$$Q_{n-n} = 2a^2 h \rho_1 c_1 t_1 = 2 \cdot 6,0^2 \cdot 0,20 \cdot 2,2 \cdot 10^3 \cdot 0,92 \cdot 10^3 \cdot 20 = 5,8 \cdot 10^8 \Delta \mathcal{K}$$

Полное количество теплоты, которое потребуется на разогрев всего дома

$$Q_1 = 8,2 \cdot 10^8 \Delta \mathcal{K}. \quad (9)$$

Стоимость этой теплоты руб  $S = cQ = 6,4 \cdot 10^8 \cdot 2,8 \cdot 10^8 \text{ Дж} = 38 \text{ руб.}$  (10) 01 Дж

$$S = c_0 Q_1 = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\Delta \mathcal{K}} \cdot 8,2 \cdot 10^8 \Delta \mathcal{K} = 38 \frac{\text{руб}}{\Delta \mathcal{K}}. \quad (10)$$

Время разогрева можно оценить по формуле Дж  $\tau = 1 = 2,8 \cdot 10^4 \text{ с} = 23 \text{ часа.}$  (11) Р·З 1010Вт 0 Вт

$$\tau = \frac{Q_1}{P_0} = \frac{8,2 \cdot 10^8 \Delta \mathcal{K}}{10 \cdot 10^3 \text{ Вт}} = 8,2 \cdot 10^4 \text{ с} = 23 \text{ часа}. \quad (11)$$

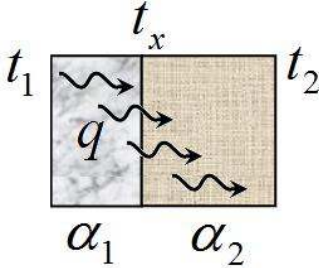
**3.1** Сравнивая формулы (1) и (3), находим, что  $\lambda_1 = 1,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{h_1} = \frac{1,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}}{0,20 \text{ м}} = 6,0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}. \quad (12)$$

**3.2** Обозначим температуру стыка слоев  $t_x$ . Тогда плотности потоков теплоты через разные слои описываются формулами

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha_1(t_1 - t_x) \\ q_2 &= \alpha_2(t_x - t_2) \end{aligned} \quad (13)$$

В установившемся режиме  $q_1 = q_2$ . Из этого условия находим температуру места соединения слоев



$$\alpha_1(t_1 - t_x) = \alpha_2(t_x - t_2) \Rightarrow t_x = \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Плотность потока теплоты можно выразить через температуры границ составного слоя, как

$$q = q_2 = q_1 = \alpha_1(t_1 - t_x) = \alpha_1 \left( t_1 - \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (t_1 - t_2).$$

Тем самым доказана формула (4) условия задачи. Видно, что проводимость составного слоя равна<sup>1</sup>

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

**3.3 -3.4** Рассчитаем тепловую проводимость слоя изоляции Вт/м·К  $\alpha = 0,012$  Вт/м·К  $\alpha = 0,012$  Вт/м·К (17) 22 Вт/м·К

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{h_2} = \frac{6,0 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{К}}}{0,10 \text{ м}} = 6,0 \cdot 10^{-1} \frac{\text{Вт} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}.$$

Тепловая проводимость стены с изоляцией в соответствии с формулой (16) оказывается равной Вт/м·К  $\alpha = 0,55$  Вт/м·К (18)  $\alpha = 0,55$  Вт/м·К

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{6,0 \cdot 0,60}{6,6} \frac{\text{Вт} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} = 0,55 \frac{\text{Вт} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}.$$

В этом случае условие стационарности температуры будет иметь вид

$$P = 2aH \cdot \alpha(t_1 - t_0).$$

Подставляя численные значения, находим требуемую тепловую мощность

$$P_1 = 2aH \cdot \alpha(t_1 - t_0) = 2 \cdot 6,0 \cdot 2,5 \cdot 0,55 \cdot 20 = 660 \text{ Вт},$$

Что в  $\frac{P_0}{P_1} = \frac{7200}{660} = 11$  раз меньше, чем мощность обогрева дома без утеплителя.

**3.5** По формуле (14) рассчитаем температуру внешней стороны бетонной стенки

$$t_x = \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{6,0 \cdot 20}{6,6} = 18^\circ.$$

Фактически всю бетонную коробку необходимо нагреть на  $20^\circ$ . Поэтому количество теплоты, требуемое на это равно

Следовательно, на нагревание стен требуется количество теплоты, равное

$$Q_2 = C_1 t_1 = 5,8 \cdot 10^7 \frac{\Delta x}{K} \cdot 20\text{K} = 11,6 \cdot 10^8 \Delta x,$$

Стоимость этой теплоты  $S_2 = c_0 Q_2 = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\Delta x} \cdot 1 \cdot 10^8 \Delta x = 53 \text{ руб}$ , что больше, чем при нагреве стен без утеплителя.

Время разогрева утепленного дома

$$\tau_2 \approx \frac{Q_2}{P_0} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ с} = 32 \text{ часа}.$$

<sup>1</sup> Не сложно доказать, что в общем случае произвольного числа слоев

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \dots$$

3.6 На поддержание комнатной температуры утепленного дома в течение суток требуется количество теплоты  $Q = P_1 \tau = 660 \cdot 24 \cdot 3600 = 5,7 \cdot 10^7$  Дж, стоимость которой  $S = 2,6$  руб. Следовательно на поддержание постоянной температуры в течение 7 дней надо затратить 18 руб, что значительно меньше чем стоимость разогрева. Следовательно, поддерживать постоянную температуру выгоднее, чем каждую субботу разогревать дом, тем более, что в этом случае не придется сидеть в холодном доме всю субботу!