

Условие

Задание 1. Взвешивание ... площади!

Есть много замечательных геометрических фигур! Изучение их свойств требует хорошего знания математических методов, например, интегрирования, дифференцирования и т.д. Но некоторые геометрические характеристики можно изучать физическими методами.

В данной работе вам с помощью законов физики предстоит изучить свойства эллипсов.

По определению: эллипс есть геометрическое место точек, для которых сумма расстояний ($r_1 + r_2$) до двух фиксированных точек F_1, F_2 (фокусов эллипса) постоянна.

В декартовой системе координат уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Параметры a и b называются полуосями эллипса. При $a = b$ эллипс превращается в окружность.

Это уравнение Вам может понадобиться только в том случае, если вместо измерений Вы захотите немного «поинтегрировать» (не оценивается).

Приборы и оборудование: лист картона, две канцелярских кнопки, ножницы, штатив, нить, две гайки.

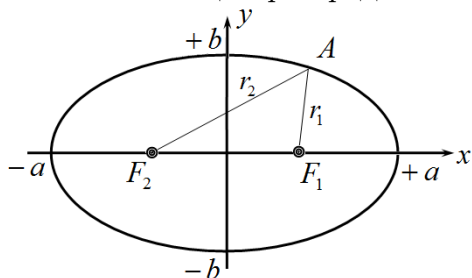
Часть 1. Инженерная

Вам необходимо самостоятельно подготовить семейство полуэллипсов из выданного вам листа картона.

Прежде чем начать его кроить – продумайте последовательность ваших действий!

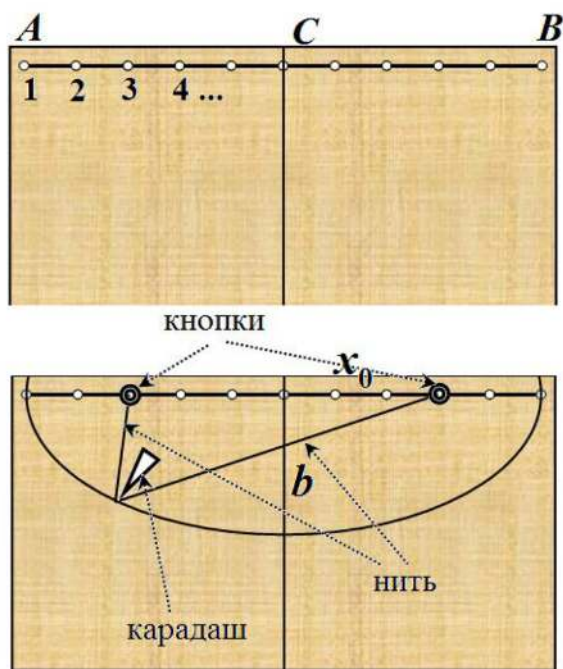
Разметка.

Вдоль длинной стороны листа вблизи его края проведите прямую линию AB , через ее середину проведите к ней перпендикуляр CD . На равных расстояниях (примерно 1 см) симметрично относительно центра сделайте кнопкой ряд небольших отверстий 1,2,3,4.....



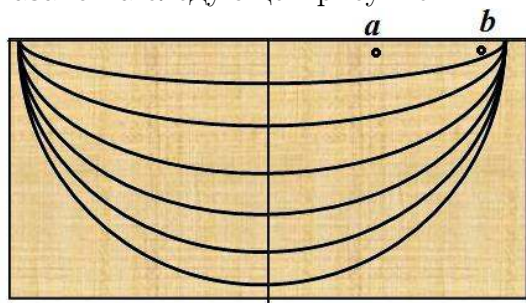
К остриям кнопок привяжите кусок нити. Ее длина должна быть в точности равна расстоянию между крайними отверстиями на прямой AB . Вставьте кнопки симметрично в отверстия. Натяните нить острием карандаша (или ручки) и, все время удерживая нить натянутой, проведите линию на листе картона. Если Вы ничего не напутали. То получившаяся линия и будет половиной эллипса.

Постройте таким способом несколько (6-7) различных эллипсов. Для каждого из них измерьте величину полуоси b (полуось a при этом остается неизменной).



1.1 Постройте график зависимости длины полуоси b от положения кнопки x_0 (расстояния от центра до фокуса эллипса) 1.2 Предложите теоретическую формулу для полученной зависимости.

В результате построений ваш лист картона должен выглядеть приблизительно так, как показано на следующем рисунке.

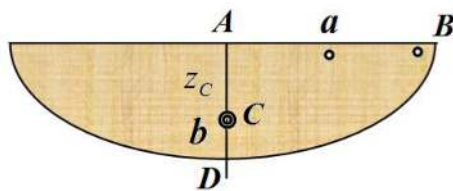


Сделайте в нем два отверстия a, b . За отверстие a вы будете подвешивать вырезанные эллипсы, а к отверстию b подвешивать дополнительный груз.

Далее последовательно вырезайте из картона исследуемые эллипсы, подумайте в каком порядке проводить измерения!

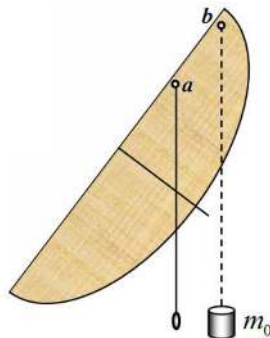
Часть 2 Измерительная.

Вам необходимо исследовать зависимость положения центра масс полуэллипса C (расстояния от $z_C = |AC|$ от центра эллипса до центра масс полуэллипса) его площади от величины полуоси b .



следующая

пленной в
вес. Затем
 b .
определить
сы к массе



Для проведения таких измерений Вам предлагается следующая методика. Подвесьте вырезанную фигуру на иголке, закрепленной в штативе, через отверстие a . К иголке привяжите отвес. Затем подвесьте груз (гайку) на нити, проходящей через отверстие b . Этих двух экспериментов достаточно, чтобы определить положение центра масс полуэллипса и отношения его массы к массе груза m/m_0 .

2.1 Укажите какие величины Вам необходимо измерить, чтобы получить значения расстояния z_C и отношения масс m/m_0 . Приведите формулы по которым Вы будете находить эти величины. 2.2 Проведите необходимые измерения для определения величин z_C и m/m_0 для всех вырезанных Вами полуэллипсов. 2.3 Постройте график зависимости z_C от величины полуоси b . Предложите формулу, описывающую полученную зависимость, найдите ее параметры. 2.4 На основании полученных вами экспериментальных данных найдите отношение $\frac{z_C}{R}$ Для полукруга радиуса R (даже в том случае, когда среди ваших фигур полукруга нет). 2.5 Постройте график зависимости отношения масс m/m_0 от длины полуоси b . 2.6 На основании полученных экспериментальных данных предложите точную формулу для площади эллипса.

Решение

Задание 9-1. Взвешивание ... площади!

Часть 1. Инженерная

Рассмотрим предложенную процедуру построения эллипса с помощью двух кнопок и нити постоянной длины. Необходимая длина нити есть сумма расстояний от произвольной точки эллипса A до фокусов. Эту длину легко найти, если рассмотреть крайнее положение карандаша (т.е. точки A) на оси Ox . В этом случае длина нити должна быть равной

$$L = (a - x_0) + (a + x_0) = 2a. \quad (1)$$

Важно отметить, что эта длина не зависит положения фокусов (величины x_0), поэтому для всех фокусов используется нить одной и той же длины. Отметим, что для наших измерений использовались эллипсы с большой полуосью, равной $a = 150\text{мм}$.

1.1 Результаты измерений зависимости малой полуоси эллипса b от расстояния x_0 приведены в таблице 1 и на графике 1.

Таблица 1.

x_0 , мм	b , мм
140	57
130	74
120	88
110	102
100	112
90	119
80	126
70	131
60	136
50	140

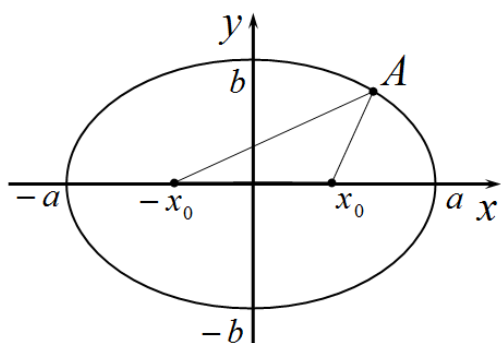
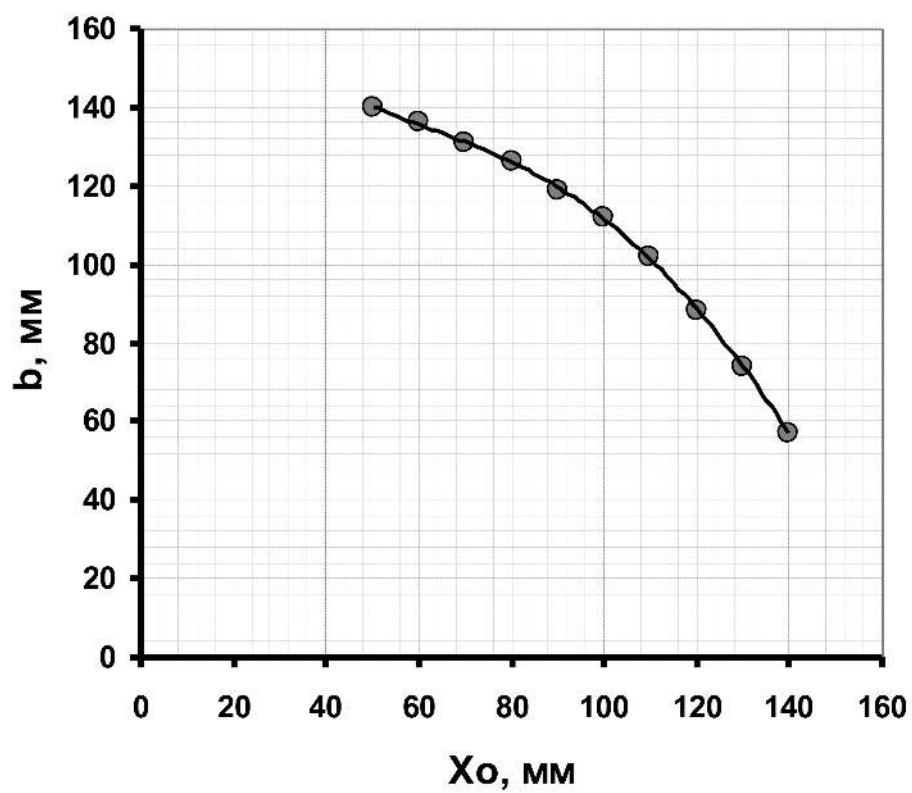


График 1 Зависимость длины полуоси от расстояния до фокуса



1.2 Теоретическую формулу для полученной зависимости можно получить, рассмотрев положение карандаша на оси Oy .

Из теоремы Пифагора непосредственно следует, что

$$b = \sqrt{a^2 - x_0^2}.$$

(2)

Наиболее наглядным доказательством справедливости этой формулы служит график линеаризованной зависимости $b^2(x^2)$, который показан на следующем рисунке.

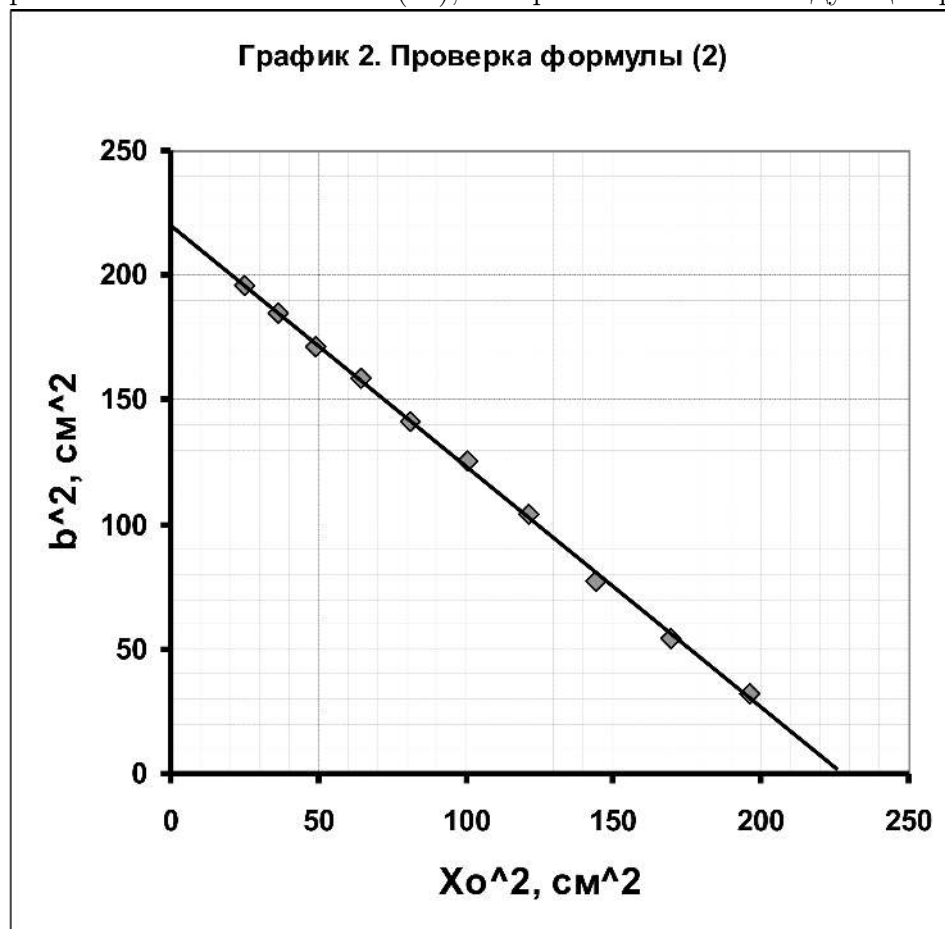


График этой зависимости представляет собой прямую линию с коэффициентом наклона, равным -1 и отсекающую на осях равные отрезки примерно равные $15^2 = 225 \text{ см}^2$.

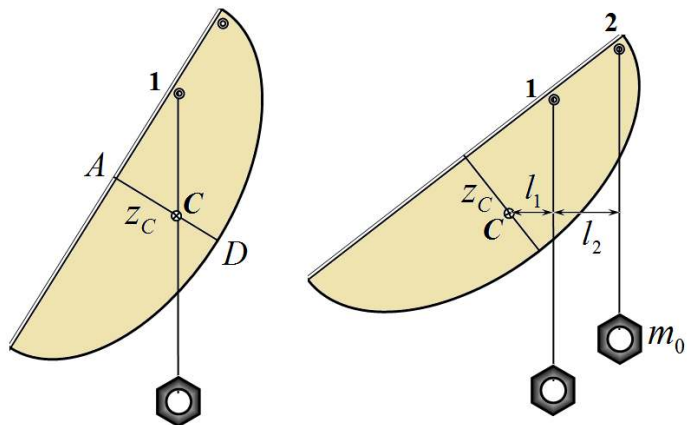
Этот график экспериментально доказывает теорему Пифагора.

Часть 2 Измерительная.

2.1 Для проведения необходимых измерений следует воспользоваться следующей последовательностью действий. Подвесить вырезанную фигуру на игле, проходящую через отверстие 1. На иглу подвесить отвес. Нить отвеса проходит через центр масс, который также находится на оси симметрии фигуры AD . Точка их пересечения C и является центром масс. Не сложно измерить и расстояние z_C от C центра полуэллипса. После этого в отверстие 2 следует подвесить нить с грузом (гайкой). Далее следует измерить расстояния l_1 и l_2 . Тогда по правилу рычага отношения масс вырезанной фигуры m и гайки m_0 будет равно отношению плеч

$$\frac{m}{m_0} = \frac{l_2}{l_1}.$$

(3)

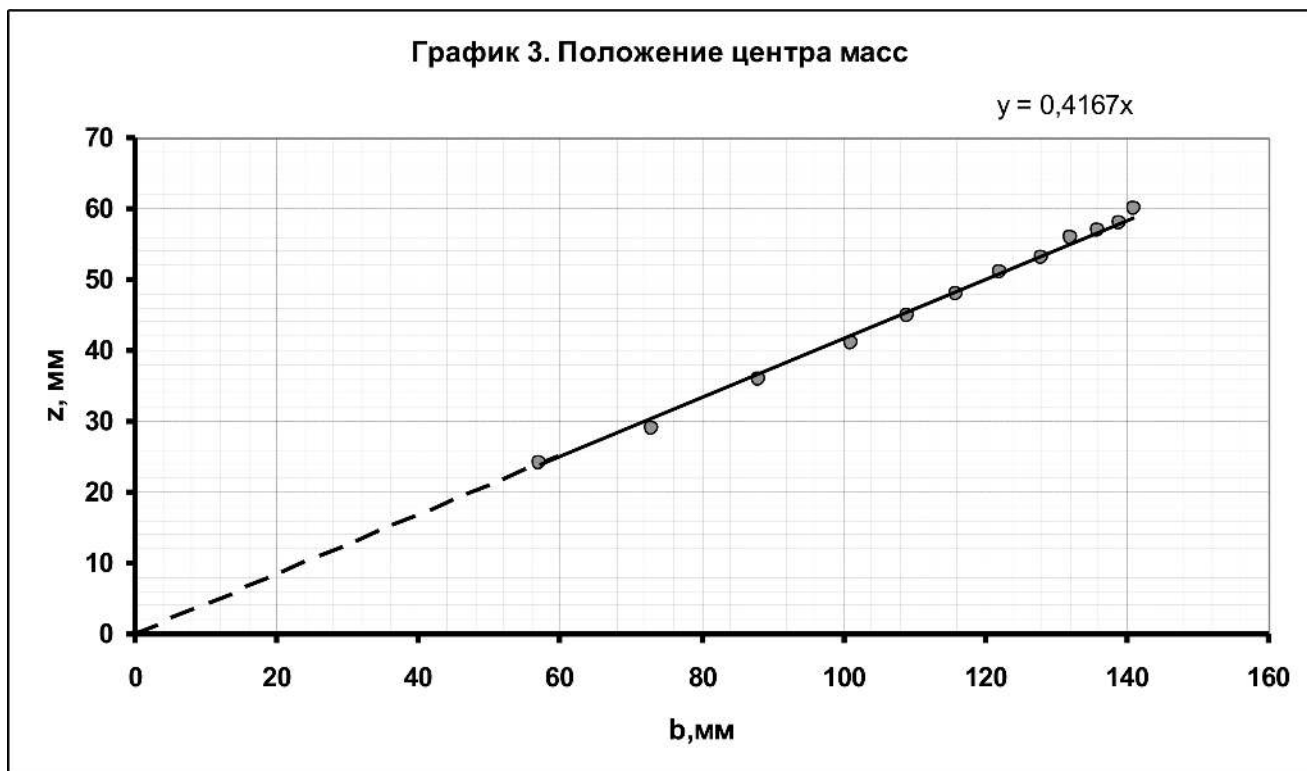


2.2 Результаты необходимых измерений приведены в таблице 2.

Таблица 2.

x_0, мм	b, мм	z_0, мм	l_2, мм	l_1, мм	m/m_0
20	141	60	55	7	7,86
30	139	58	48	8	6,00
40	136	57	46	8	5,75
50	132	56	47	8	5,88
60	128	53	48	9	5,33
70	122	51	45	9	5,00
80	116	48	45	10	4,50
90	109	45	43	10	4,30
100	101	41	41	11	3,73
110	88	36	38	11	3,45
120	73	29	38	12	3,17
130	57	24	34	12	2,83

2.3 На графике 3 показана зависимость координаты центра масс вырезанной фигуры z_C от длины полуоси эллипса b .



Из графика следует, что координата центра масс z_C прямо пропорциональна длине полуоси b :

$$z_C = Ab \quad (4)$$

где коэффициент пропорциональности, найденный по наклону графика примерно равен $A \approx 0,42$.

Отметим, что теоретическое значение этого коэффициента $A = \frac{4}{3\pi} \approx 0,424$, что очень *близко* к *измеренному значению*.

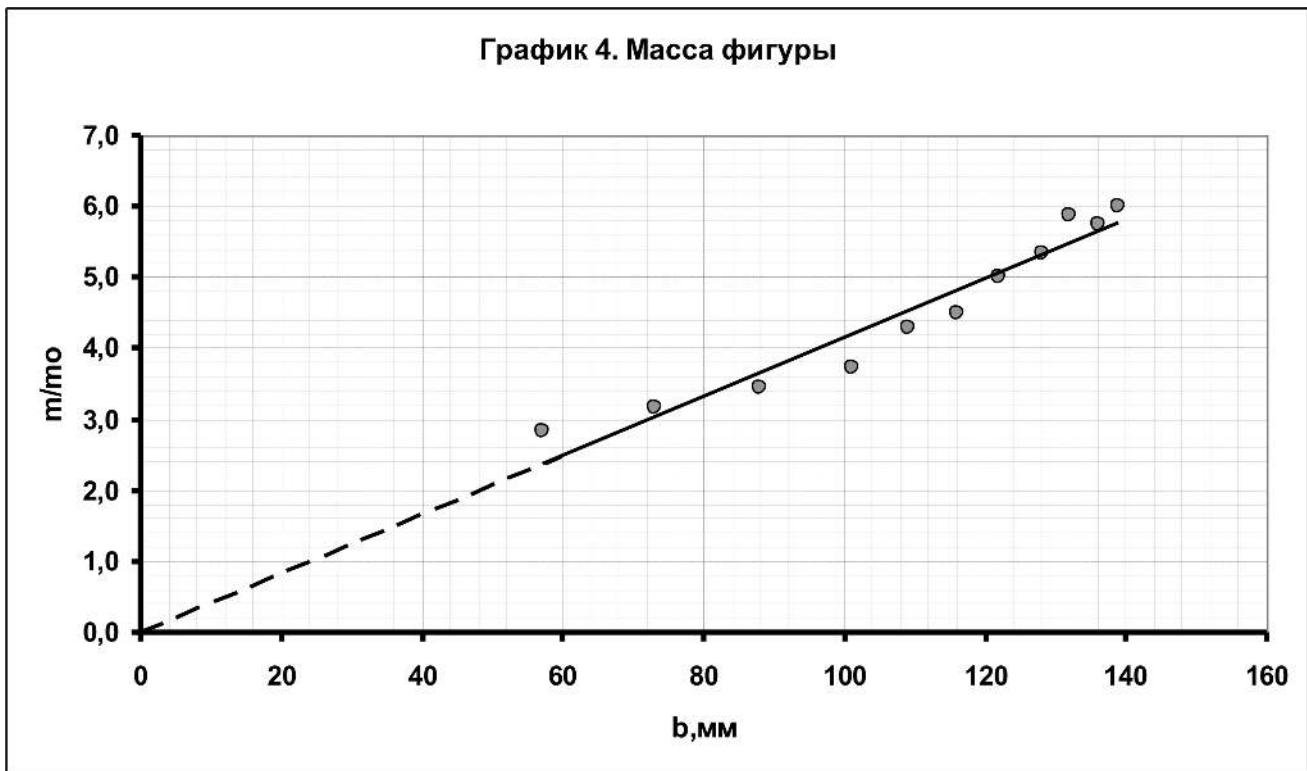
2.4 На основании полученных вами экспериментальных данных найдите отношение $\frac{z_c}{R}$ Для полукруга радиуса R (даже в том случае, когда среди ваших фигур полукруга нет).

2.5 Постройте график зависимости отношения масс m/m_0 от длины полуоси b .

2.6 На основании полученных экспериментальных данных предложите точную формулу для площади эллипса.

2.4 Полукруг является частным случаем полуэллипса, поэтому отношение $\frac{z_c}{R}$ для полукруга (когда $b = R$) равно значению коэффициента A .

2.5 График зависимости отношения масс m/m_0 от длины полуоси b показан на следующем рисунке.

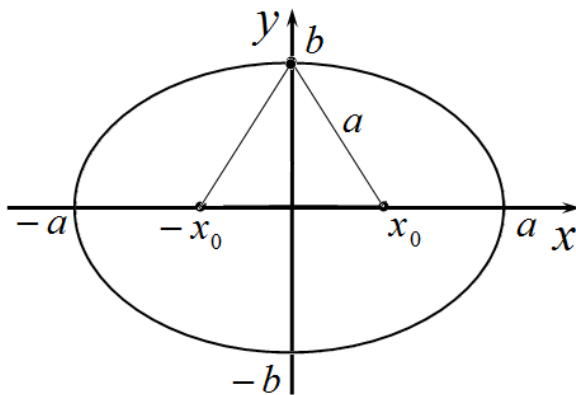


Этот график показывает, что масса полуэллипса пропорциональна длине полуоси b . Так как масса пропорциональна площади фигуры, то и площадь эллипса пропорциональна величине b , т.е.

$$S = Bb. \quad (5)$$

Коэффициент пропорциональности можно найти, зная формулу для площади круга $S = \pi R^2$. Как уже отмечалось, круг является частным случаем эллипса, когда его полуоси равны $a = b = R$ и совпадают с радиусом круга. Сравнивая формулы для площадей эллипса и круга приходим к выводу, что площадь эллипса рассчитывается по формуле

$$S = \pi ab. \quad (6)$$



¹ Погрешность рассчитана по МНК, хотя применим и графический метод.