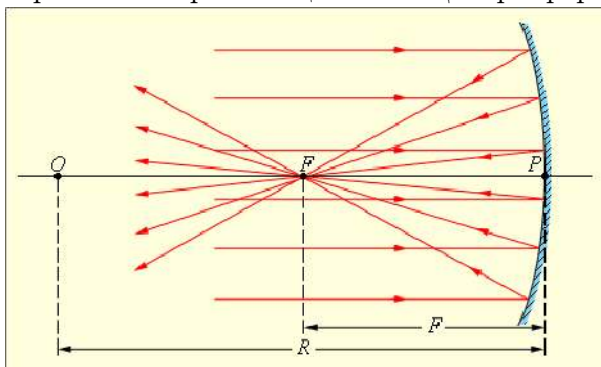


Сферическая абберация

Условие

Задача 10-2 Сферическое зеркало.

«Сферическая абберация» Вогнутое зеркало, широко используемое при астрономических и оптических наблюдениях, представляет собой сферический сегмент (небольшая часть сферы, отсечённая плоскостью) радиуса R , на внутреннюю поверхность которого нанесено покрытие, зеркально отражающее свет. Центр сферы находится в точке O (см. рис.).



При построении изображений в вогнутом зеркале традиционно считается, что пучок параллельных лучей, распространяющихся вблизи главной оптической оси OP зеркала (т.н. параксиальных лучей), после отражения от зеркала пересекается в точке главного фокуса F на расстоянии PF от линзы (далее F). Данное свойство вогнутого зеркала аналогично свойству собирающей линзы, поэтому иногда вогнутое зеркало называют собирающим зеркалом. Математически параксиальное приближение соответствует приближению малых углов, в рамках которого применимы приближенные формулы

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha \quad \cos \alpha \approx 1. \quad (1)$$

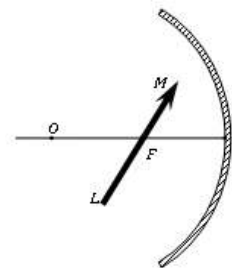
Часть 1. «Классическая – параксиальное приближение»

Рассмотрим пучок лучей, распространяющихся вблизи оптической оси ($h \ll R$) вогнутого зеркала параллельно ей. Радиус кривизны зеркала $R = 40\text{см}$.

1.1 Докажите, что все лучи идущие параллельно оптической оси после отражения от зеркала пересекаются в одной точке. Найдите фокусное расстояние зеркала.

1.2 Точечный источник света находится на оптической оси зеркала на расстоянии a ($a > R$). Докажите, что все лучи выходящие от источника и отраженные от зеркала пересекаются в одной точке (т.е. формируют изображение). Найдите расстояние b от этой точки до оптического центра зеркала точки P .

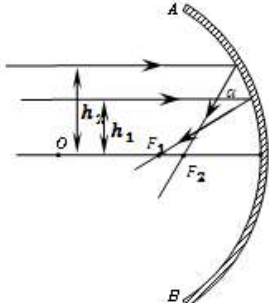
1.3 Постройте изображение предмета (стрелки) в вогнутом зеркале (см. рис.) Длина стрелки равна половине фокусного расстояния.



Часть 2. «Абберационная ... дальние лучи»

Явление сферической аберрации² заключается в том, что два луча параллельных главной оптической оси зеркала, идущие на достаточно больших различных расстояниях h_1 и h_2 от неё, всё же пересекутся с осью не в одной, а в различных точках (фокусах) F_1 и F_2 (см. рис.). То есть, говоря «абсолютно строго», главного единого фокуса вогнутого зеркала не существует! Но поскольку изображение, несколько искажённое у краёв, в таком зеркале мы всё же видим, то сильно беспокоиться по этому поводу не нужно.

Во второй части задачи рассмотрим световые лучи, подверженные явлению сферической аберрации, т.е. не являющиеся параксиальными.



2 2

Математически это означает, что эти лучи идут также параллельно главной оптической оси зеркала на расстоянии, которое сравнимо с радиусом кривизны зеркала. В этом случае углы падения нельзя считать малыми.

2.1 На зеркало падает пучок лучей, параллельных главной оптической оси и полностью освещающий зеркало. Нарисуйте схематически ход этих лучей после отражения от зеркала. Нарисуйте схематически огибающую отраженных лучей.

2.2 Световой луч распространяется параллельно оси зеркала на расстоянии $h_1 = 5,0$ см от оптической оси зеркала. На каком расстоянии F_1 он пересечёт оптическую ось зеркала (это и есть «его» фокусное расстояние)?

2.3 Введем понятие степени аберрации луча как отношение $\eta = \frac{|F_1 - F_0|}{F_0}$ (F_0 — фокусное расстояние в параксиальном приближении). При каком расстоянии $h_{\max}$ степень аберрации достигнет 100%? Нарисуйте ход этого луча.

Решение

Задача 10-2 Сферическое зеркало.

1.1 Рассмотрим произвольный луч AC , идущий параллельно оптической оси. Отраженный луч — CF . Из закона отражения света и свойства внешнего угла треугольника следует, что $\angle CFP = 2\angle COP$. Из треугольника OCD можно выразить

$$h = R \sin \alpha \approx R\alpha \quad (1)$$

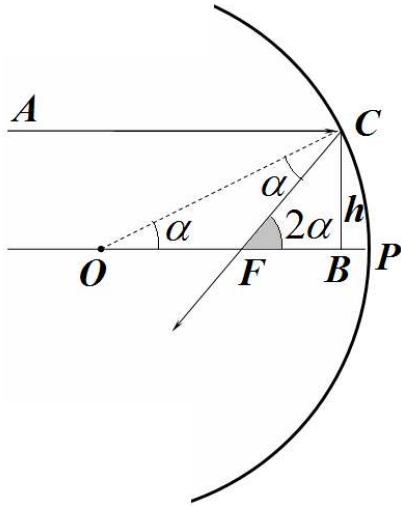
При малых углах точка B практически совпадает с оптическим центром линзы P . Для треугольника FCB справедливо равенство

$$h = F \tan 2\alpha \approx 2F\alpha. \quad (2)$$

Приравнявая (1) и (2), находим, что

$$F = \frac{R}{2}, \quad (3)$$

Независимо от h , поэтому все лучи после отражения проходят через эту точку — следовательно, это и есть фокус.



1.2 На рисунке $AP = a$ - расстояние от источника до зеркала; $BP = b$ - расстояние от изображения до линзы; $OP = R$. Смотрим внимательно на углы, по свойствам треугольников и закону отражения записываем

$$\begin{cases} \beta = \alpha + \phi \\ \gamma = \beta + \varphi \end{cases} \Rightarrow 2\beta = \alpha + \gamma. \quad (4)$$

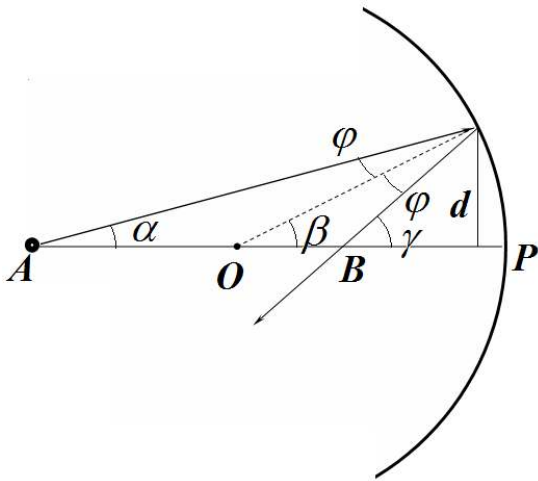
Также можно записать

$$\begin{aligned} a\alpha &= d \\ R\beta &= d. \\ a\gamma &= d \end{aligned} \quad (5)$$

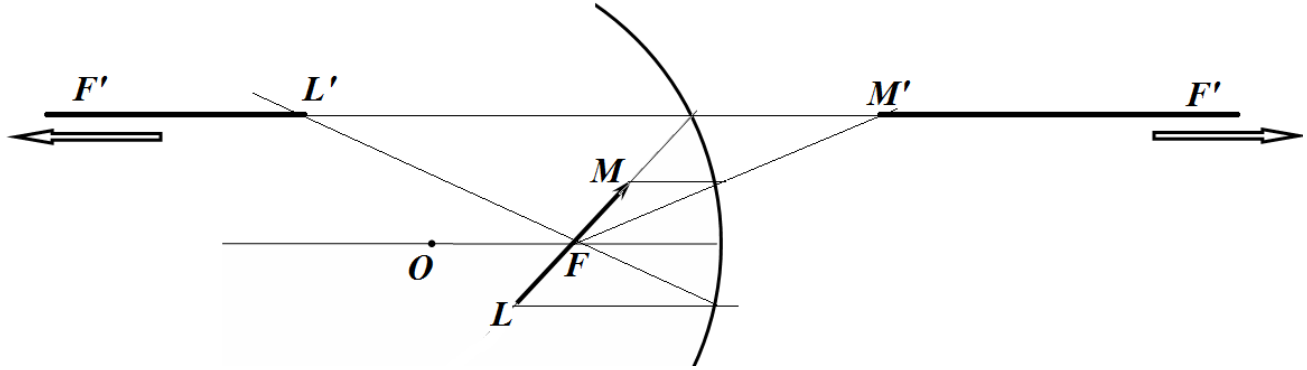
Из (5) выражаем углы и подставляем в (4), и получаем формулу зеркала

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \quad (6)$$

Независимо от выходящего из точки A луча, следовательно, B есть изображение точки A .



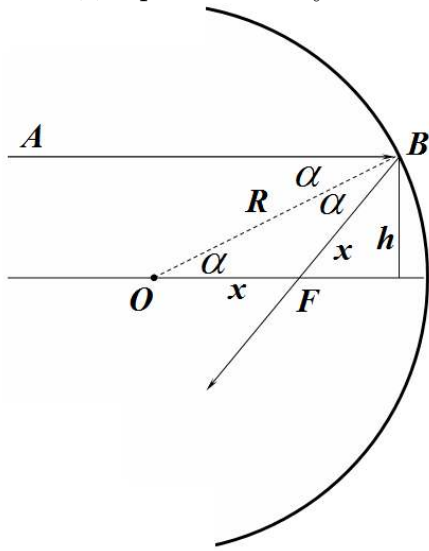
1.3 Изображение строится традиционными методами. Проводим прямую вдоль стрелки LM - отраженный луч параллельно оптической оси - все точки изображения на этой прямой. Находим изображение M : луч параллельно оптической оси - отраженный через фокус, продолжение луча до пересечения с первым лучом - получаем изображение M' . Аналогично



для точки L . Изображение фокуса «убегает» на бесконечность, причем в обе стороны. Таким образом, получаем разорванное бесконечное изображение.

Часть 2. «Аберрационная ... дальние лучи»

2.1 ход отраженных лучей показан на рисунке.



2.2 Рассмотрим ход произвольного луча AB без использования параксиального приближения. Из закона отражения следует, что треугольник OBF равнобедренный, поэтому

$$R = 2x \cos \alpha \quad (7)$$

Где x – расстояние от центра зеркала до фокуса. Также запишем

$$h = R \sin \alpha. \quad (8)$$

Исключая из этих выражений угол α , получим

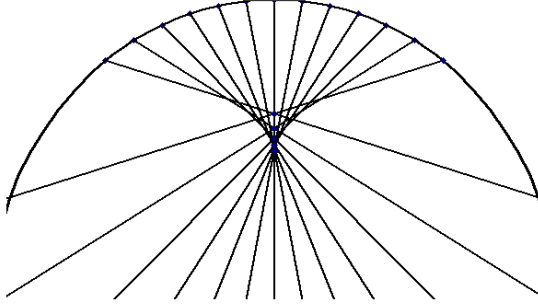
$$\left(\frac{R}{2x}\right)^2 + \left(\frac{h}{R}\right)^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{R}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}}}. \quad (9)$$

Тогда

$$F_1 = R - x = R - \frac{R}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}}}. \quad (10)$$

Действительно расстояние зависит от параметра луча h . При малых h получаем найденное в параксиальном приближении значение фокусного расстояния.

2.3 Из формулы (9) следует, что x всегда больше $\frac{R}{2}$, т.е. отраженный луч приближается к зеркалу. Единственная возможность, чтобы абберация луча стала равной 100%, $F_1 - F_0 = \frac{R}{2}$, или $x = R$. Это возможно при $\sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}} = 2 \Rightarrow h = R\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$. В этом случае отраженный луч попадает в оптический центр зеркала P .



$$\frac{2}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}}}$$

² Слово абберация означает искажение.