

Условие

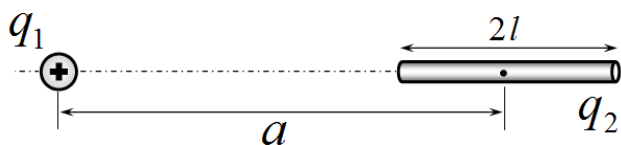
Задача 11-2. Когда отрезок можно считать точкой?

Приведем выдержку из возможного диалога на уроке физике: Ученик: Что такое точечный заряд? Учитель: Точечным зарядом называется заряженное тело, размерами которого в данных условиях можно пренебречь! Ученик: А при каких условиях размерами тела можно пренебречь? Учитель: Если размеры тела значительно меньше расстояний между телами! Ученик: Значительно больше – это во сколько раз? Учитель: ...????

Поможем учителю и рассмотрим один конкретный пример взаимодействия не точечных тел.

Часть 1.

Тонкий стержень длиной $2l$ равномерно заряжен, его суммарный заряд равен q_2 . На оси стержня на расстоянии a от его середины ($a > l$) находится точечный заряд q_1 .



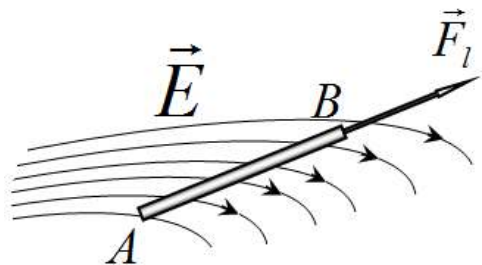
1.1 Получите точное выражение для силы, действующей на стержень со стороны точечного заряда.

Подсказка.

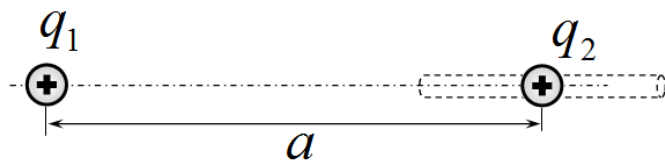
Покажите, что в произвольном электростатическом поле на равномерно заряженный стержень вдоль оси стержня³ действует сила $\vec{F}_l$, которая пропорциональна разности потенциалов на концах стержня

$$F_l = \gamma(\varphi_A - \varphi_B) \quad (1)$$

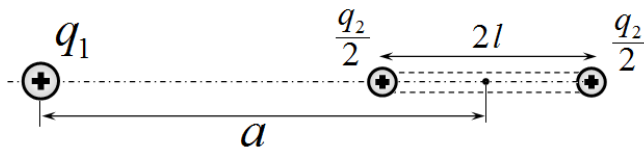
Найдите коэффициент пропорциональности γ в этой формуле.



1.2 Предположим, что стержень можно считать точечным зарядом, сосредоточенным в его середине. Запишите формулу для силы, действующей на стержень в этом приближении. Назовем эту формулу Приближением точечного заряда.



1.3 Теперь предположим, что суммарный заряд стержня можно разделить поровну и расположить на его концах. Запишите формулу для силы, действующей на стержень в этом приближении. Назовем эту формулу Приближением двухточечного заряда.



3 3

1.4 Обозначим отношение $\frac{l}{a} = z$ и будем считать его малой величиной ($z \ll 1$). Покажите, что относительные погрешности приближенных формул имеют второй порядок малости, т.е. их можно представить в виде $\varepsilon = Cz^2$, где C - некоторое число. Найдите значения эти постоянных для двух приближенных формул. Какая из приближенных формул точнее?

1.5 Оцените, при каком отношении $\frac{a}{l}$ стержень можно считать точечным зарядом, если допустимая погрешность расчеты силы взаимодействия составляет 1%

При оценке погрешностей можете пользоваться приближенной формулой, справедливой при малых x :

$$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x.$$

Решение

Задача 11-2. Когда отрезок можно считать точкой?

Начнем с реализации подсказки. Разобьем равномерно заряженный стержень на малые участки длиной Δl . Проекция силы, действующей этот элемент, на ось стержня равна

$$\Delta F = \lambda \Delta l E \cos \alpha. \quad (1)$$

Чтобы найти суммарную силу, следует просуммировать по всем отрезкам стержня

$$F_l = \sum_i \lambda E_i \Delta l_i \cos \alpha_i = \lambda \sum_i E_i \Delta l_i \cos \alpha_i. \quad (2)$$

Но стоящая здесь сумма есть разность потенциалов между концами стержня, поэтому эту силу можно представить в виде

$$F_l = \lambda(\varphi_A - \varphi_B). \quad (3)$$

1.1 Используя формулу (3), запишем точное выражение для силы взаимодействия

$$F = \lambda k q_1 \left(\frac{1}{a-l} - \frac{1}{a+l} \right) = \lambda k q_1 \frac{2l}{a^2 - l^2} = k \frac{q_1 q_2}{a^2 - l^2} \quad (4)$$

1.2 Приближение точечного заряда. Выражение для силы имеет вид

$$F = k \frac{q_1 q_2}{a^2} \quad (5)$$

1.3 Приближение двух точечного заряда Выражение для силы в этом приближении

$$F = \frac{k}{2} \frac{q_1 q_2}{(a-l)^2} + \frac{k}{2} \frac{q_1 q_2}{(a+l)^2} = k q_1 q_2 \frac{a^2 + l^2}{(a^2 - l^2)^2} \quad (6)$$

1.4 Упростим формулы, считая отношение $\frac{l}{a}$ малым

Для формулы (4) (точной):

$$F = k \frac{q_1 q_2}{a^2 - l^2} = k \frac{q_1 q_2}{a^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{l}{a}\right)^2} \approx k \frac{q_1 q_2}{a^2} (1 + z^2). \quad (4a)$$

Для формулы (6)

$$F = kq_1q_2 \frac{a^2 + l^2}{(a^2 - l^2)^2} = k \frac{q_1q_2}{a^2} \frac{1 + z^2}{(1 - z^2)^2} \approx k \frac{q_1q_2}{a^2} (1 + z^2)(1 + 2z^2) \approx k \frac{q_1q_2}{a^2} (1 + 3z^2) \quad (6a)$$

Сравнивая эти формулы, видим, что относительная погрешность приближения точечного заряда

$$\varepsilon_1 = -z^2 \quad (7)$$

погрешность двухточечного приближения

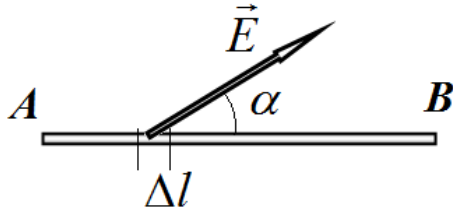
$$\varepsilon_2 = 2z^2 \quad (8)$$

Неожиданно, но приближение точечного заряда точнее!

1.5 Из выражения (7) получаем

$$\left(\frac{l}{a}\right)^2 \approx 0,01 \Rightarrow a \approx 10l$$

Таким образом, «во много раз больше» оказалось всего лишь в десять!



³ Возможно существование и других компонент суммарной силы, действующей на стержень.