

Условие

Задача 11-2 Дисковый маятник.

Оборудование: лист картона формата А4, ножницы, шило, циркуль, два болта с гайками, штатив с лапкой и гвоздем, секундомер.

Формулу для периода математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

иногда необоснованно применяют для физического маятника (подвешенного колеблющегося тела), считая, что l - расстояние от оси вращения до центра масс тела. В данной задаче вам предстоит опровергнуть это распространенное заблуждение. В работе используется дисковый маятник: сплошной диск радиуса R , который может колебаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр. В работе используется картонный диск. Обозначим массу диска m . На расстоянии r от центра диска симметрично закреплены два груза, в качестве которых используются небольшие болты с гайками. Массу каждого груза обозначим m_0 . Вам необходимо исследовать зависимость периода колебаний диска от параметра z - расстояния от хорды, соединяющей грузы до центра диска.

Часть 1. Теоретическая.

1.1 Покажите, что расстояние z пропорционально расстоянию l от центра диска до центра масс системы (укажите на рисунке примерное положение центра масс):

$$l = \gamma z. \quad (1)$$

Получите формулу для значения коэффициента γ , выразив его через массы диска, грузов и геометрические размеры системы.

1.2 Выскажите предположения о виде зависимости периода колебаний от параметра z . Не надо выводить формулу для периода колебаний, достаточно указать вид зависимости $T(z)$.

Часть 2. Производственная (тоже оценивается!)

Разметьте лист картона – нарисуйте на нем диск максимально возможного диаметра, отметьте окружность, по которой вы будете располагать болты с гайками (примерно на расстоянии 1 см от края диска). Разметьте положения отверстий для болтов, так, чтобы вам было удобно проводить измерения. Вырежьте аккуратно диск, сделайте небольшое отверстие в его центре для оси (в качестве которой используйте гвоздь, закрепленный в лапке штатива), сделайте отверстия для болтов. После выполнения работы диск сдайте жюри, точность его разметки и изготовления будет оценена.

Часть 3. Экспериментальная.

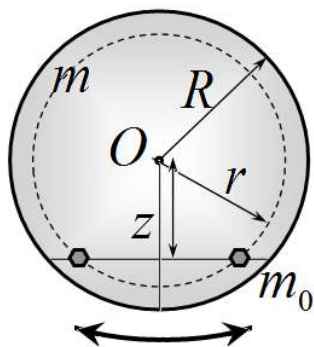
3.1 На основе результатов измерений (укажите каких) оцените значение коэффициента γ в формуле (1).

3.2 Измерьте зависимость периода колебаний дискового маятника от параметра z . Оцените погрешность измерения периода. Постройте график полученной зависимости.

3.3 Линеаризуйте полученную зависимость $T(z)$ (т.е. представьте ее в таких координатах, чтобы она была линейна). Постройте график линеаризованной зависимости.

3.4 Рассчитайте численные значения параметров полученной зависимости. Оценивать погрешности этих параметров не надо.

3.5 Сравните полученные экспериментальные данные с вашими теоретическими предсказаниями – сделайте вывод о применимости формулы для периода математического маятника к исследованному дисковому маятнику.

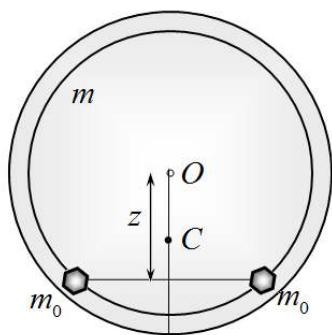


Решение

Задача 11-2 Дискосый маятник.

1.1 Координата центра масс диска с грузами определяется по стандартной формуле

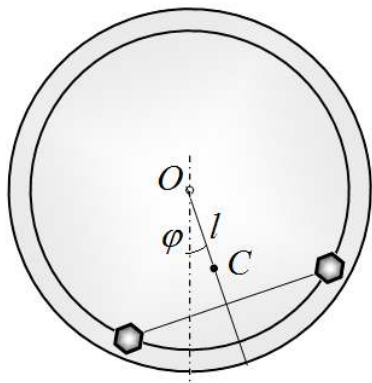
$$l = z_C = \frac{2m_0}{2m_0 + m} z \quad (1)$$



Поэтому параметр $\gamma = \frac{2m_0}{2m_0 + m}$ и равен отношению массы грузов к массе всего маятника. Существенно, что координата центра масс самого диска равна нулю.

1.2 Для определения вида зависимости периода колебаний от расстояния z можно воспользоваться энергетическим подходом. Обозначим угол отклонения маятника от вертикали φ . Тогда кинетическая энергия пропорциональна квадрату угловой скорости $\omega = \varphi'(t)$:

$$K = \frac{I\omega^2}{2} \quad (2)$$



Причем коэффициент пропорциональности I (момент инерции) не зависит от положения грузов на окружности, т.е. не зависит от параметра z . Потенциальная энергия определяется формулой

$$U = -Mgl \cos \varphi \approx -Mgl \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \quad (3)$$

(Здесь $M = m + 2m_0$) и зависит от положения грузов! Записывая уравнения закона сохранения энергии для колебательного движения маятника

$$\frac{I\omega^2}{2} + Mgl\frac{\varphi^2}{2} = E \quad (4)$$

Видим, что оно описывает гармонические колебания с периодом

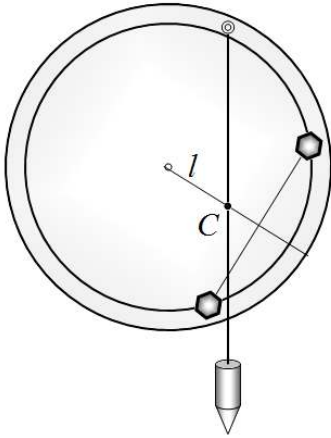
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mg\gamma z}} = \frac{C}{\sqrt{z}}. \quad (5)$$

Часть 3. Экспериментальная.

3.1 Параметр γ легко измерить. Для этого достаточно подвесить маятник за одно из отверстий и с помощью отвеса (в качестве которого можно использовать, например, линейку) определить положение центра масс l .

В нашей установке получены следующие значения

$$\gamma = \frac{l}{z} = \frac{1,9 \text{ см}}{16 \text{ см}} \approx 0,12. \quad (6)$$



3.2 В таблице 1 приведены результаты измерений периодов колебаний от параметра z . Для каждого положения грузов трижды измерены времена t_k $N = 5$ колебаний. В качестве результата измерения периода использовалось среднее значение времен колебаний, деленное на их число

$$T = \frac{\langle t \rangle}{N} = \frac{\sum_{k=1}^3 t_k}{15}. \quad (7)$$

Для оценки погрешности измерений первоначально рассчитывалась погрешность измерения времени по формуле

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{\sum_k (t_k - \langle t \rangle)^2}{n(n-1)}} \quad (8)$$

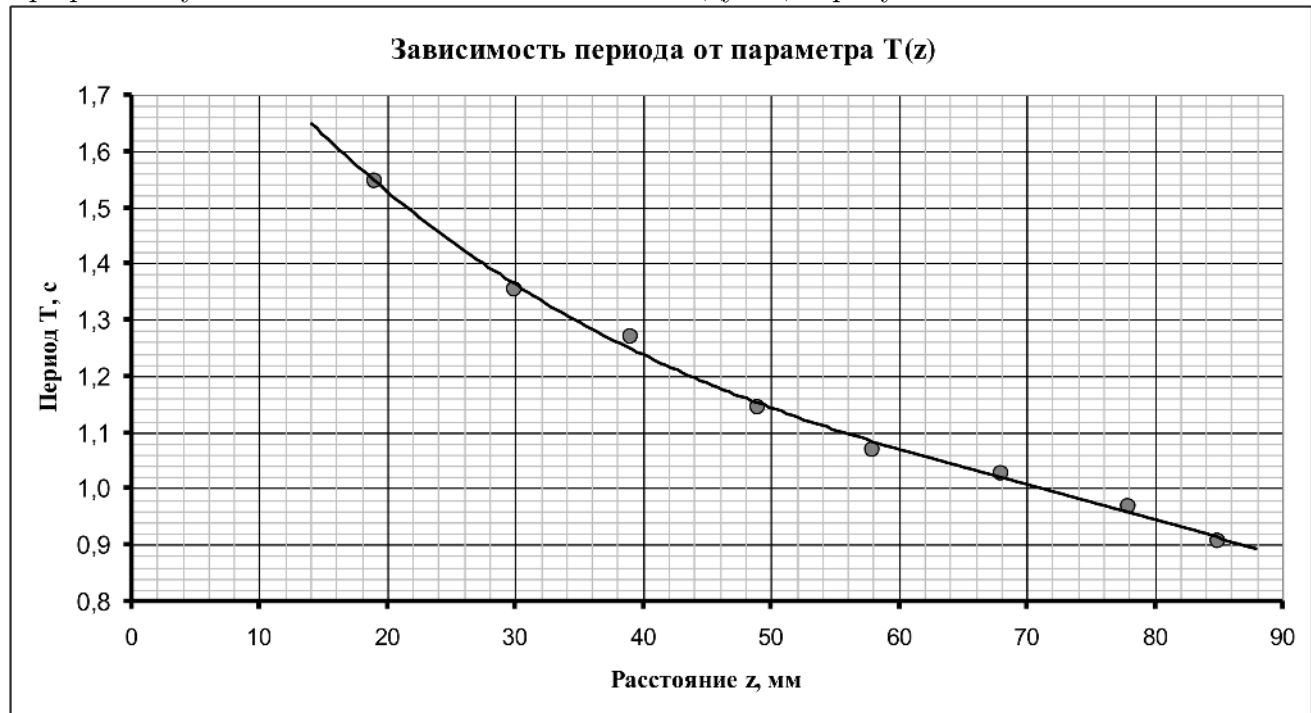
Здесь $n = 3$. Погрешности измерения периодов рассчитаны по формуле

$$\Delta T = \frac{\Delta t}{N}. \quad (9)$$

Таблица 1.

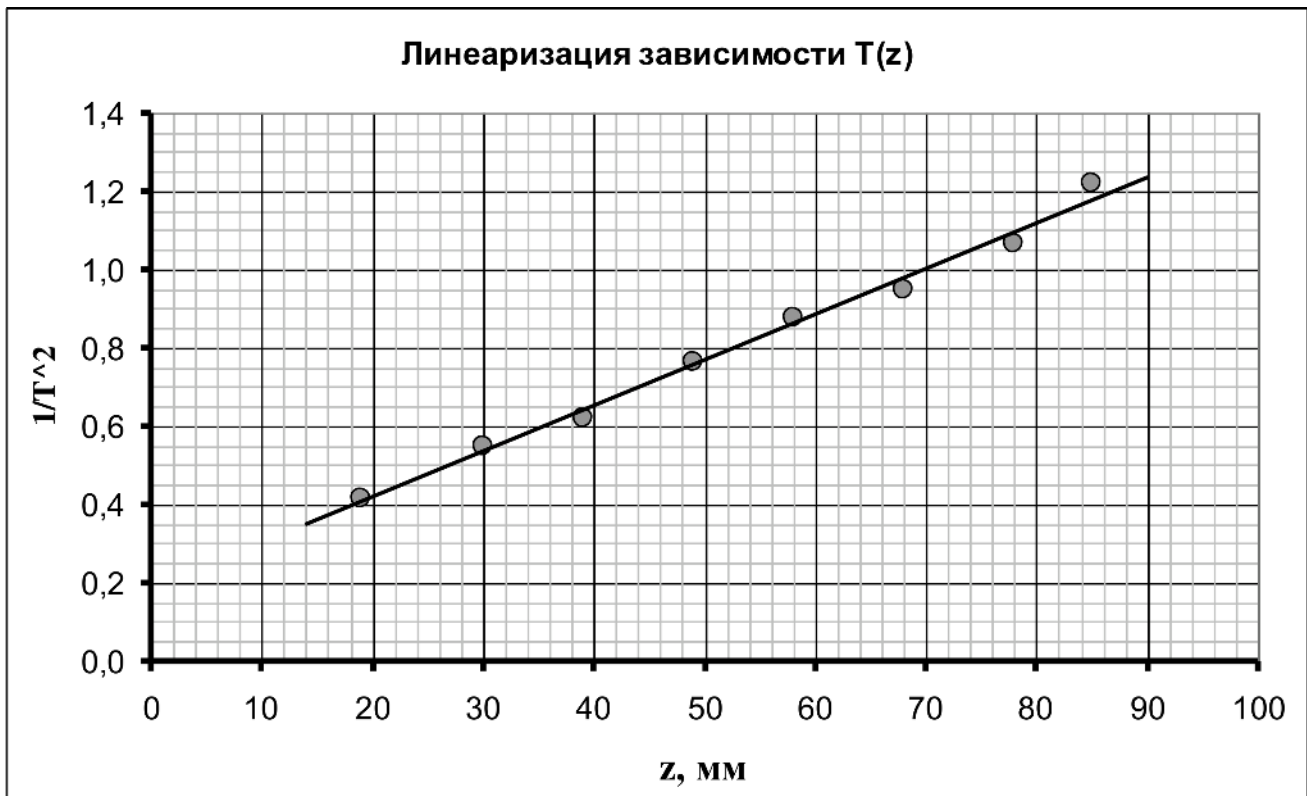
z , мм	Времена 5 колебаний			$\langle t \rangle$, с	Период колебаний	
	t_1 , с	t_2 , с	t_3 , с		T , с	ΔT , с
19	7,66	7,73	7,82	7,737	1,547	0,037
30	6,79	6,74	6,76	6,763	1,353	0,012
39	6,33	6,38	6,34	6,350	1,270	0,012
49	5,72	5,71	5,73	5,720	1,144	0,005
58	5,37	5,32	5,35	5,347	1,069	0,012
68	5,14	5,13	5,11	5,127	1,025	0,007
78	4,86	4,85	4,81	4,840	0,968	0,012
85	4,58	4,49	4,52	4,530	0,906	0,021

График полученной зависимости показан на следующем рисунке.



Часть 3. Экспериментальная.

3.3 В данном эксперименте возможна систематическая ошибка в измерении параметра z , по нескольким причинам: неточность вырезания диска; неоднородность картона, неточность выбора оси вращения и большой размер отверстия; неточность положения грузов и т.д. Поэтому истинное значение этого параметра может быть записано в виде $Z = z + \delta z$, где δz - некоторый систематический, но не известный сдвиг. При измерении периодов колебаний присутствуют только случайные ошибки. С этой точки зрения лучшей линеаризацией является зависимость $\frac{1}{T^2}(z)$. В этом случае систематическая ошибка параметра z приведет только к сдвигу прямой линии. На рисунке показана эта линеаризованная зависимость. Ее линейность подтверждает найденную теоретическую зависимость (5).



3.4 Полученная зависимость описывается линейной функцией

$$T^{-2} = 0,0116 z + 0,1876 = K(z + \delta z). \quad (10)$$

где $K = 0,0116 \text{ с}^{-2} \cdot \text{мм}^{-1}$, $\delta z = 16 \text{ мм}$.

Как оказалось, действительно, в измерении z присутствует заметный сдвиг δz .

Дополнение. Ликбез повышенного уровня.

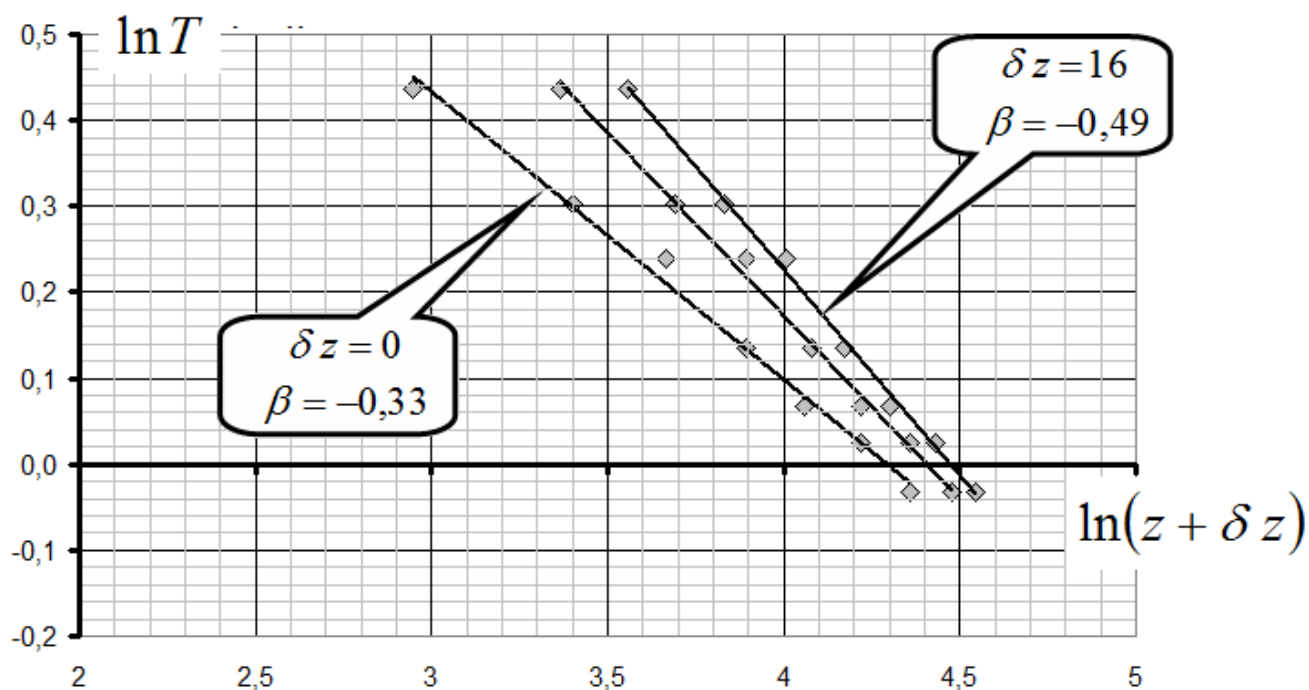
Наличие постоянного сдвига заметно ухудшает другие «очевидные» способы линеаризации. На первый взгляд кажется, что хорошей линеаризацией зависимости

$$T = \frac{C}{\sqrt{z}} \quad (Д1)$$

Является двойной логарифмический масштаб

$$\ln T = A + \beta \ln z \quad (Д2)$$

Если в этих координатах коэффициент наклона β окажется равным $\beta = -\frac{1}{2}$, то эксперимент подтверждает зависимость (Д1). Посмотрите, что же получается при такой линеаризации: коэффициент наклона $-0,33$ (корень кубический!?). Если же ввести найденный сдвиг и построить зависимость «со сдвигом» $\ln T = A + \beta \ln(z + \delta z)$, то при $\delta z = 16$ коэффициент наклона оказывается равным ожидаемому значению $\beta = -0,49$. Для демонстрации зависимости рассчитанного показателя степени от сдвига на рисунке построена зависимость при $\delta z = 10$



Аналогичная ситуация складывается и при другой «очевидной» линеаризации $T\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$.

На следующем рисунке показано несколько кривых зависимости $T\left(\frac{1}{\sqrt{z+\delta z}}\right)$ при $\delta z = 0; 10; 16$, которые показывают, как эта зависимость выпрямляется при правильно найденном значении сдвига.

