

Условие

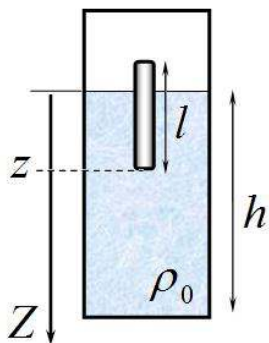
Задача 9-1. Переменная плотность

Во всех пунктах задачи под давлением в жидкости подразумевается только гидростатическое давление, обусловленное весом жидкости. Атмосферное давление увеличивает давление во всех точках на одну и ту же величину (закон Паскаля), поэтому при описании равновесия тел его можно не учитывать. Иными словами, давление у свободной поверхности жидкости следует считать равным нулю. Ускорение свободного падения известно и равно g .

Часть 1. Обычная жидкость

Жидкость плотности ρ_0 налита в высокий вертикальный сосуд. Высота столба жидкости в сосуде равна h . Введем ось координат Z , направленную вертикально вниз, начало отсчета находится на поверхности жидкости.

1.1 Запишите формулу, описывающую зависимость давления внутри жидкости от глубины z : $P(z)$. Постройте схематический график полученной зависимости.



В сосуд опускают закрытую с обоих концов трубку длиной $l = \frac{h}{2}$. Массу трубки m можно изменять (например, добавляя внутрь нее песок), кроме того, считайте, что большая часть массы трубки сосредоточена в ее нижней части, поэтому трубка в жидкости всегда располагается вертикально. Площадь поперечного сечения трубки равна S .

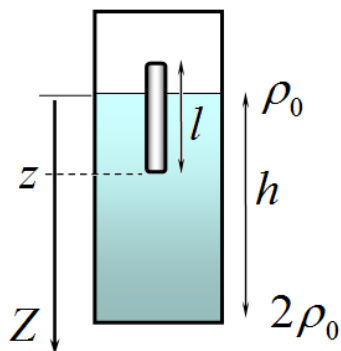
1.2 Найдите зависимость глубины погружения нижнего торца трубки от ее массы $z(m)$, постройте график этой зависимости, укажите значения параметров характерных точек вашего графика.

Часть 2. Необычная жидкость.

В вертикальный сосуд налита жидкость, плотность которой меняется по линейному закону от ρ_0 у поверхности жидкости (которая находится на высоте h) до $2\rho_0$ у дна¹.

2.1 Запишите формулу зависимости плотности жидкости от глубины $\rho(z)$. Постройте схематический график этой зависимости.

2.2 Найдите зависимость гидростатического давления внутри жидкости от глубины $P(z)$. Постройте схематический график этой зависимости.



В сосуд опускают трубку, описанную в Части 1 данной задачи.

2.3 Определите массу трубки m_0 , при которой она полностью погрузится в жидкость, т.е. ее верхний край будет касаться поверхности жидкости.

2.4 В данной части вам необходимо описать зависимость глубины погружения нижнего края трубки от ее массы. Эту зависимость удобно представить в относительных единицах: найти зависимость величины $y = \frac{z}{h}$ от отношения массы трубки к m_0 : $n = \frac{m}{m_0}$

Для построения требуемой зависимости выполните следующее.

2.4.1 Найдите зависимость глубины погружения y от величины n при условии, что верхний конец трубки находится над водой.

2.4.2 Укажите, при каком значении n_1 трубка полностью погрузится в воду.

2.4.3 Найдите зависимость глубины погружения y от величины n при условии, что верхний конец трубки находится под водой.

2.4.4 Найдите, при каком значении n_2 центр трубки будет находится на середине слоя жидкости.

2.4.5 Найдите при каком значении n_3 нижний конец трубки достигнет дна сосуда.

Решение

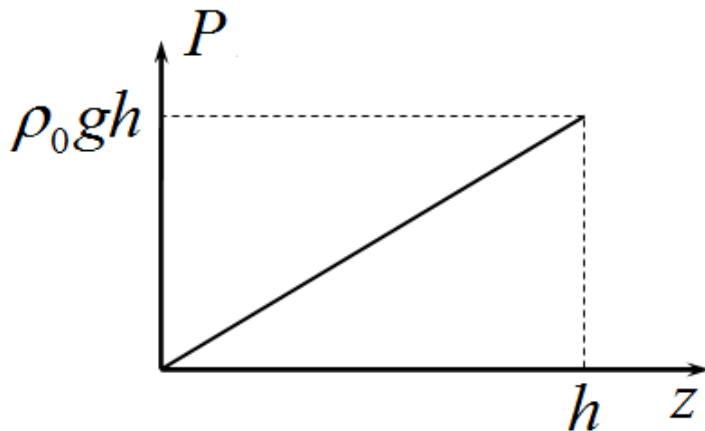
Задача 9-1. Переменная плотность

Часть 1. Обычная жидкость

1.1 Давление зависит от глубины по закону

$$P = \rho_0 g z \quad (1)$$

График этой зависимости – прямая линия, проходящая через начало координат.



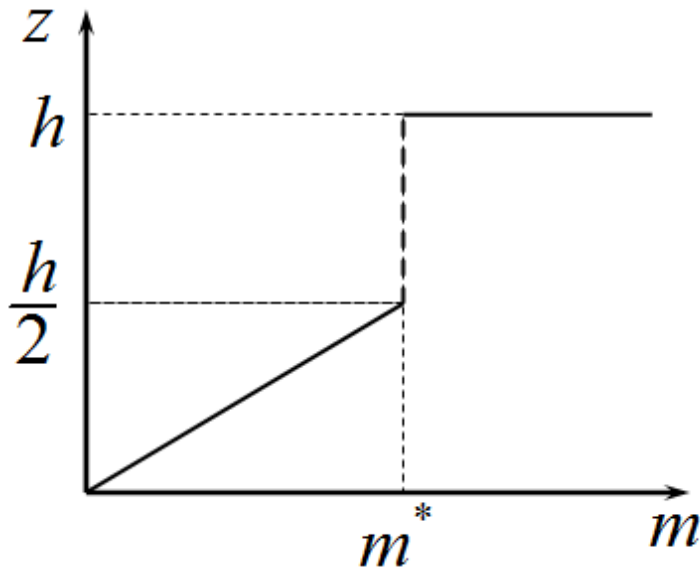
1.2 Сила тяжести трубки уравновешивается силой давления жидкости на нижнее основание

$$mg = P(z)S = \rho_0 g z S \Rightarrow z = \frac{mg}{\rho_0 g S}. \quad (2)$$

Когда трубка погрузится полностью, она сразу утонет. Масса, при которой начнет тонуть,

$$z = \frac{m^* g}{\rho_0 g S} = \frac{h}{2} \Rightarrow m^* = \frac{\rho_0 g S h}{2g}. \quad (3)$$

График зависимости на рисунке.

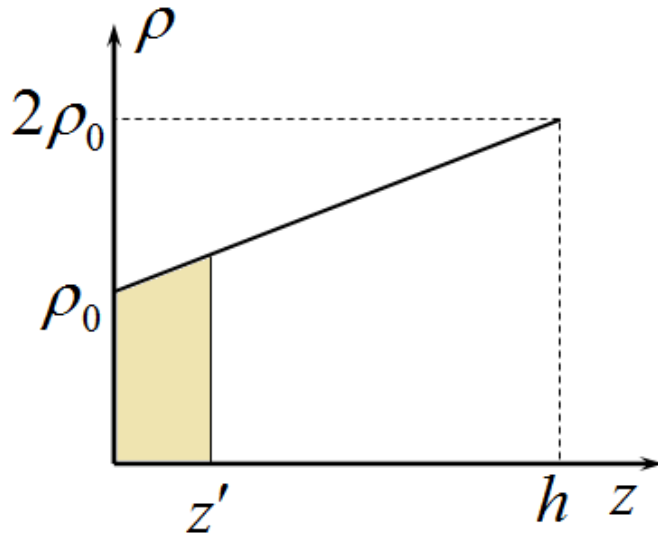


Часть 2. Необычная жидкость.

2.1 Формулу зависимости плотности жидкости от глубины $\rho(z)$

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right). \quad (4)$$

Схематический график этой зависимости на рисунке.



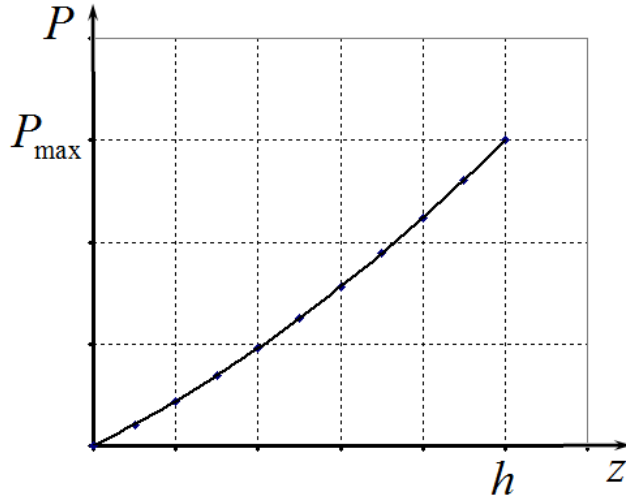
2.2 Гидростатическое давление внутри жидкости на глубине z

$$P = m'gz \quad (5)$$

Где m' масса столба жидкости единичной площади над уровнем z . Эта масса может быть найдена как площадь под графиком $\rho(z)$ (выделена на рис.), или с использованием средней плотности в слое толщиной z . Поэтому искомая зависимость имеет вид

$$P = m'gz = \rho_0 gh \left(1 + \frac{z}{2h}\right) \frac{z}{h} \quad (6)$$

График парабола, проходящая через нуль, максимальное значение при $z = h$: $P_{\max} = \frac{3}{2}\rho_0 gh$.



2.3 Массу трубки m_0 , при которой она полностью погрузится в жидкость, находится из уравнения

$$m_0 g = P\left(\frac{h}{2}\right) S \Rightarrow m_0 = \frac{S}{g} \rho_0 g h \left(1 + \frac{1}{4}\right) \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \rho_0 S h .$$

2.4.1 Если верхний конец трубки находится над водой, то справедливо уравнение

$$m g = P(z) S = \rho_0 g h S \left(1 + \frac{z}{2h}\right) \frac{z}{h} .$$

Так как $m_0 = \frac{5}{8} \rho_0 S h \Rightarrow \rho_0 S h = \frac{8}{5} m_0$, то уравнение (8) преобразуется к виду

$$\frac{m}{m_0} = \frac{8}{5} \left(1 + \frac{z}{2h}\right) \frac{z}{h} \Rightarrow y(y+2) = \frac{5}{4} n$$

Итак, при $n < 1$ глубина погружение есть положительный корень уравнения (9). Легче рассчитать $n(y)$.

При $m > m_0$ трубка полностью погружена в воду. При этом справедливо уравнение, следующее из закона Архимеда:

$$m g = \rho \left(z - \frac{h}{4}\right) g S \frac{h}{2} .$$

Здесь $\rho \left(z - \frac{h}{4}\right) = \rho_0 \left(1 + \frac{z - \frac{h}{4}}{h}\right) = \rho_0 \left(\frac{3}{4} + y\right)$ - плотность жидкости на уровне середины трубки (средняя плотность вытесненной жидкости). Из уравнения (10) следует

$$m g = \rho_0 \left(\frac{3}{4} + y\right) g S \frac{h}{2} = \frac{4}{5} m_0 g \left(\frac{3}{4} + y\right) \Rightarrow n = \frac{3 + 4y}{5} \Rightarrow y = \frac{5n - 3}{4} .$$

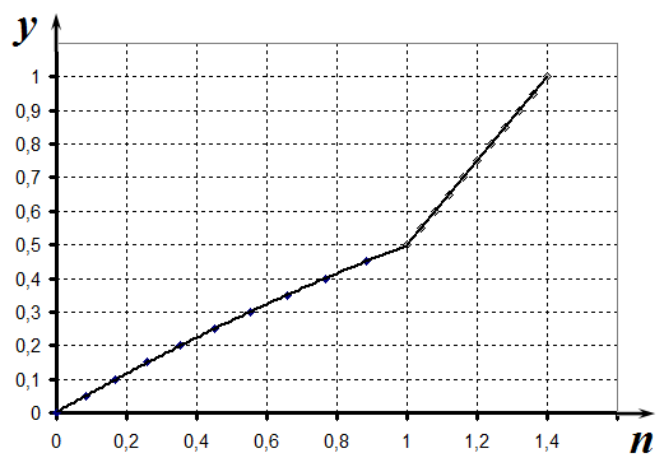
Таким образом, при $n > 1$ зависимость глубины погружения от массы линейна.

2.4.2 Трубка полностью погрузится в воду при $n_1=1$ (по определению)

2.4.4 Центр трубки будет находиться на середине слоя жидкости (при этом $y = \frac{3}{4}$) при $n_2 = \frac{6}{5}$.

2.4.5 Трубка достигнет дна ($y = 1$) при $n_3 = \frac{7}{5}$.

График искомой зависимости показан на следующем рисунке.



¹ Плотность жидкости может изменяться из-за наличия растворенных веществ. Но это к решению задачи не относится.