

в яблочко!

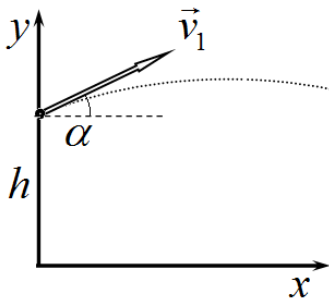
Условие

Задача 9.3. Попади «в яблочко!»

Во всех частях задачи сопротивлением воздуха следует пренебречь. Ось Y вертикальна, а ось X горизонтальна. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

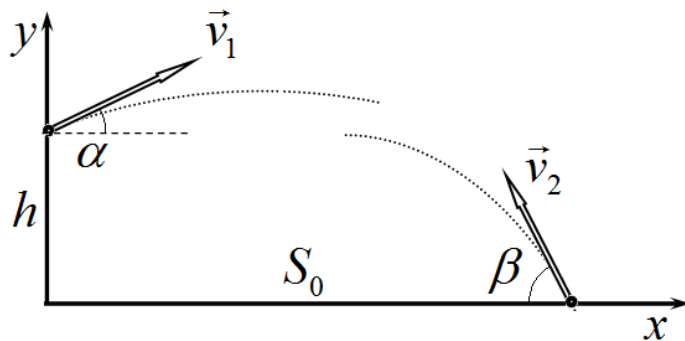
Часть 1 «Пристрелка»

Тело брошено под углом α к горизонту с некоторой высоты h над поверхностью земли. Модуль начальной скорости тела равен v_1 . Ось X расположена на поверхности земли. 1.1 Запишите закон движения тела, то есть зависимость координат тела от времени $x_1(t)$, $y_1(t)$. 1.2 Пусть $v_1 = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $h = 10\text{м}$, $\alpha = 30^\circ$. Рассчитайте горизонтальную дальность полета тела, т.е. координату x в момент его падения на поверхность земли.



Часть 2. «Стрельба по движущимся мишеням»

Первое тело бросают так, как описано в Части 1, а второе с поверхности земли из точки, находящейся на расстоянии S_0 от начала координат. Модуль скорости второго тела равен v_2 , вектор скорости направлен под углом β к горизонту, как показано на рисунке. Тела бросают одновременно.



2.1 Запишите закон движения второго тела $x_2(t)$, $y_2(t)$. 2.2 Запишите выражения для зависимостей разностей координат тел $(x_1 - x_2)$ и $(y_1 - y_2)$ от времени. 2.3 Как зависит расстояние между телами $S(t)$ от времени? 2.4 Пусть первое тело начинает падать без начальной скорости ($v_1 = 0$). Под каким углом к горизонту β надо бросить первое тело, чтобы оно попало в первое? При какой минимальной начальной скорости второго тела v_2 столкновение произойдет до падения первого тела на землю?

Достаточно найти любую тригонометрическую функцию (синус, косинус, тангенс...) угла β . 2.5 Первое тело бросают с поверхности земли ($h = 0$) углом α к горизонту с начальной скоростью v_1 . Второе тело бросают под углом β . С какой начальной скоростью v_2 надо бросить второе тело, чтобы оно столкнулось с первым в полете? При какой минимальной скорости v_2 возможно столкновение в полете?

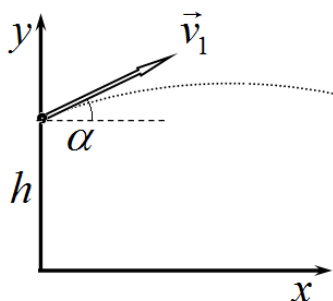
Решение

Задача 9.3 Попади «в яблочко!»

Описание движения тела, брошенного под углом α к горизонту, является настолько известной и банальной темой задач, что всякие подробные комментарии к решению будут излишними.

1.1 Закон движения тела задается функциями

$$\begin{aligned}x_1(t) &= v_1 \cos \alpha \cdot t \\ y_1(t) &= h + v_1 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.\end{aligned}\tag{1}$$



1.2 Горизонтальная дальность равна координате x в момент падения, т.е. при $y = 0$. Для определения времени движения следует решить уравнение

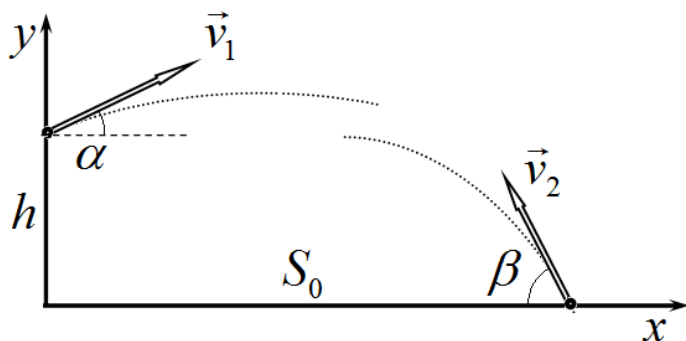
$$h + v_1 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{v_1 \sin \alpha + \sqrt{(v_1 \sin \alpha)^2 + 2gh}}{g} \approx 2,73 \text{ с}.\tag{2}$$

Тогда дальность полета

$$S = x(t^*) = v_1 \cos \alpha \cdot t^* \approx 47 \text{ м}.$$

Часть 2. «Стрельба по движущимся мишеням»

Первое тело бросают так, как описано в Части 1, а второе с поверхности земли из точки, находящейся на расстоянии S_0 от начала координат. Модуль скорости второго тела равен v_2 , вектор скорости направлен под углом β к горизонту, как показано на рисунке. Тела бросают одновременно.



2.1 Закон движения второго тела записывается аналогично

$$\begin{aligned}x_2(t) &= S_0 - v_2 \cos \beta \cdot t \\ y_2(t) &= v_2 \sin \beta \cdot t - \frac{gt^2}{2}.\end{aligned}\tag{3}$$

2.2 Разностей координат тел $(x_1 - x_2)$ и $(y_1 - y_2)$ зависят от времени по законам:

$$(x_1 - x_2) = (v_1 \cos \alpha + v_2 \cos \beta) \cdot t - S_0$$

$$(y_1 - y_2) = h + (v_1 \sin \alpha - v_2 \sin \beta) \cdot t. \quad (4)$$

Важно отметить, что разности координат не зависят от времени от ускорения тел (так как они одинаковы), поэтому в дальнейшем «можно забыть» об ускорении свободного падения.

2.3 Расстояние между телами $S(t)$ определяется по теореме Пифагора

$$S(t) = \sqrt{((v_1 \cos \alpha + v_2 \cos \beta) \cdot t - S_0)^2 + (h + (v_1 \sin \alpha - v_2 \sin \beta) \cdot t)^2}. \quad (5)$$

2.4 Так как ускорение можно не учитывать, то нужно целиться прямо в точку начала падения, поэтому

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{S}. \quad (6)$$

Минимальная скорость, когда тело долетает до основания уступа

$$S_0 = \frac{2v_2^2 \sin \beta \cos \beta}{g} \Rightarrow v_{2\min} = \sqrt{\frac{gS_0}{2 \sin \beta \cos \beta}}.$$

2.4 Можно, конечно, анализировать условия обращения в нуль «простенького» выражения (5). Но гораздо проще перейти в систему отсчета связанную с первым телом. В этой системе отсчета относительная скорость второго тела должна быть направлена на точку вылета первого тела. Очевидно, что вертикальные компоненты скоростей должны быть одинаковы, поэтому

$$v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \beta \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Тела столкнутся в воздухе, если время их полета больше, чем время их сближения по горизонтали, т.е. при выполнении условия

$$\frac{2v_2 \sin \beta}{g} > \frac{S_0}{v_1 \cos \alpha + v_2 \cos \beta} \Rightarrow v_2 > \sqrt{\frac{gS_0}{2} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)}}.$$

При выводе этого условия использовано соотношение (8).