

Джинн в бутылке

Условие

Задание 10-1 «Джинн в бутылке»

Джинн – дух в арабской мифологии (не путать с напитком – джин (пишется с одной -н-)).

Оборудование: Комплект для изучения газовых законов (шприц одноразовый 60 мл, манометр с верхним пределом измерения 300 мм. рт. ст., колба с отводом и шкалой для измерения объёма, пробка резиновая для колбы с термометром, штуцер-тройник с трубками пластиковыми соединительными), барометр (один на кабинет), секундомер, бутылка воды сильно газированной в заводской упаковке (0,5л).

Внимание!!! Бутылку с водой вскрыть только непосредственно при сборке экспериментальной установки в части 2 задачи. Ни в коем случае не превышать предел измерения давления манометром, иначе прибор выйдет из строя!*

Часть 1. «Вместилище для джинна».

В данной части Вам предстоит определить начальный внутренний объём экспериментальной установки.

Соберите экспериментальную установку: плотно закройте колбу пробкой, вставьте штуцеры в отвод колбы, в одну из соединительных трубок вставьте манометр, установите поршень шприца на отметке 60мл и вставьте шприц в другую трубку штуцера. Медленно изменяйте объём воздуха в шприце и наблюдайте за показаниями манометра. Постоянно проверяйте, не изменилась ли температура воздуха в колбе. Выясните: есть ли утечка воздуха из Вашей установки. Если есть, то устраните её и приступайте к основной части задачи.

1.1 Определите атмосферное давление p_0 .

1.2 Установите в начальном положении поршень шприца на отметке 60 мл, (стрелка манометра должна быть на нуле). Измерьте зависимость показаний p_m манометра от изменения объёма ΔV воздуха внутри установки.

Манометр показывает разность между давлением внутри колбы и атмосферным давлением.

1.3 Получите формулу, описывающую зависимость отношения $\eta = \frac{p_m}{p_m + p_0}$ от изменения объёма воздуха ΔV . Постройте график экспериментальной зависимости параметра η от изменения объёма ΔV .

1.4 Используя полученную формулу и результаты своих измерений, определите объём воздуха внутри установки (в колбе, шприце, соединительных трубках) V_0 . Оцените погрешность найденного значения.

Часть 2. «Выход джинна»

В данной части Вам предстоит исследовать зависимость давления газовой смеси над газированной водой от времени при постоянном объёме.

Внимание!!! Этот эксперимент Вы сможете провести только один раз! Поэтому продумайте методику его проведения, предварительно подготовьте необходимые таблицы для записи результатов эксперимента.*

Отсоедините шприц от установки, выдвиньте поршень шприца на максимально возможное расстояние. Выньте пробку из колбы. Налейте в колбу 500 мл газированной воды, сразу плотно закройте колбу пробкой. Вставьте шприц в трубку штуцера. Немного встряхните колбу. Если установка собрана герметично, то манометр сразу должен показать рост давления. Если Вы не успели включить секундомер, а давление уже значительно выросло, не расстраивайтесь, выньте на короткое время шприц, давление упадёт, вставляйте шприц и приступайте к измерениям.

2.1 Измерьте зависимость показаний манометра p_m от времени τ . Постройте график полученной зависимости.

2.2 Процесс выхода растворенного газа подобен процессу испарения. Изменение давления описывается уравнением (это уравнение выводить не надо):

$$\frac{\Delta p_m}{\Delta t} = \gamma(p_k - p_m) \quad (2)$$

где p_k - предельное значение давления газа в установке, γ - некоторая постоянная величина. Используя результаты ваших измерений, проверьте, справедливо ли уравнение (2) в данном эксперименте.

2.3 Определите значения параметров γ и p_k в уравнении (2).

2.4 Рассчитайте массу углекислого газа, который выделится из газированной воды за очень большой промежуток времени. Молярная масса углекислого газа $M = 44 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$.

2.5 Что, по вашему мнению, означает «очень большой промежуток времени» в предыдущем пункте? Оцените время в течение, которого давление достигнет предельного значения.

Решение

Задание 10-1 «Джинн в бутылке»

1.1 Атмосферное давление в день проведения эксперимента равно $p_0 = (768 \pm 1)$ мм рт.ст.

1.2 Результаты требуемых измерений (и промежуточные расчеты) приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Результаты измерений зависимости давления воздуха от изменения объема

Изменение объема установки ΔV , см ³	Показания манометра p_m мм.рт.ст.	Давление воздуха в установке $p = p_m + p_0$, мм.рт.ст.	Отношение $\eta = \frac{p_m}{p_m + p_0}$
0,0	0	768	0,00
5,0	6	774	0,0078
10,0	12	780	0,0154
15,0	19	787	0,0241
20,0	24	792	0,0303
25,0	29	797	0,0364
30,0	36	804	0,0448
35,0	42	810	0,0519
40,0	47	815	0,0577
45,0	54	822	0,0657
50,0	60	828	0,0725
55,0	66	834	0,0791
60,0	73	841	0,0868

1.3 Так как температура воздуха в установке постоянна, то справедливо уравнение для изотермического процесса (закон Бойля – Мариотта):

$$(p_0 + p_m)(V_0 - \Delta V) = p_0 V_0 \quad (1)$$

Из этого уравнения легко выразить

$$p_0 + p_m = \frac{p_0 V_0}{V_0 - \Delta V}$$

$$p_m = \frac{p_0 V_0}{V_0 - \Delta V} - p_0 = \frac{p_0 \Delta V}{V_0 - \Delta V} \quad (2)$$

Разделив эти уравнения, получим

$$\eta = \frac{p_m}{p_0 + p_m} = \frac{1}{V_0} \Delta V \quad (3)$$

Таким образом, эта зависимость линейна, причем коэффициент наклона обратно пропорционален искомому объему V_0 .

График измеренной зависимости показан на рисунке.



Действительно данная зависимость линейна. Коэффициент наклона этой линейной зависимости $\eta = a\Delta V + b$, рассчитанный по методу наименьших квадратов, равен

$$a = (1,43 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-3}$$

Следовательно, объем газа в установке

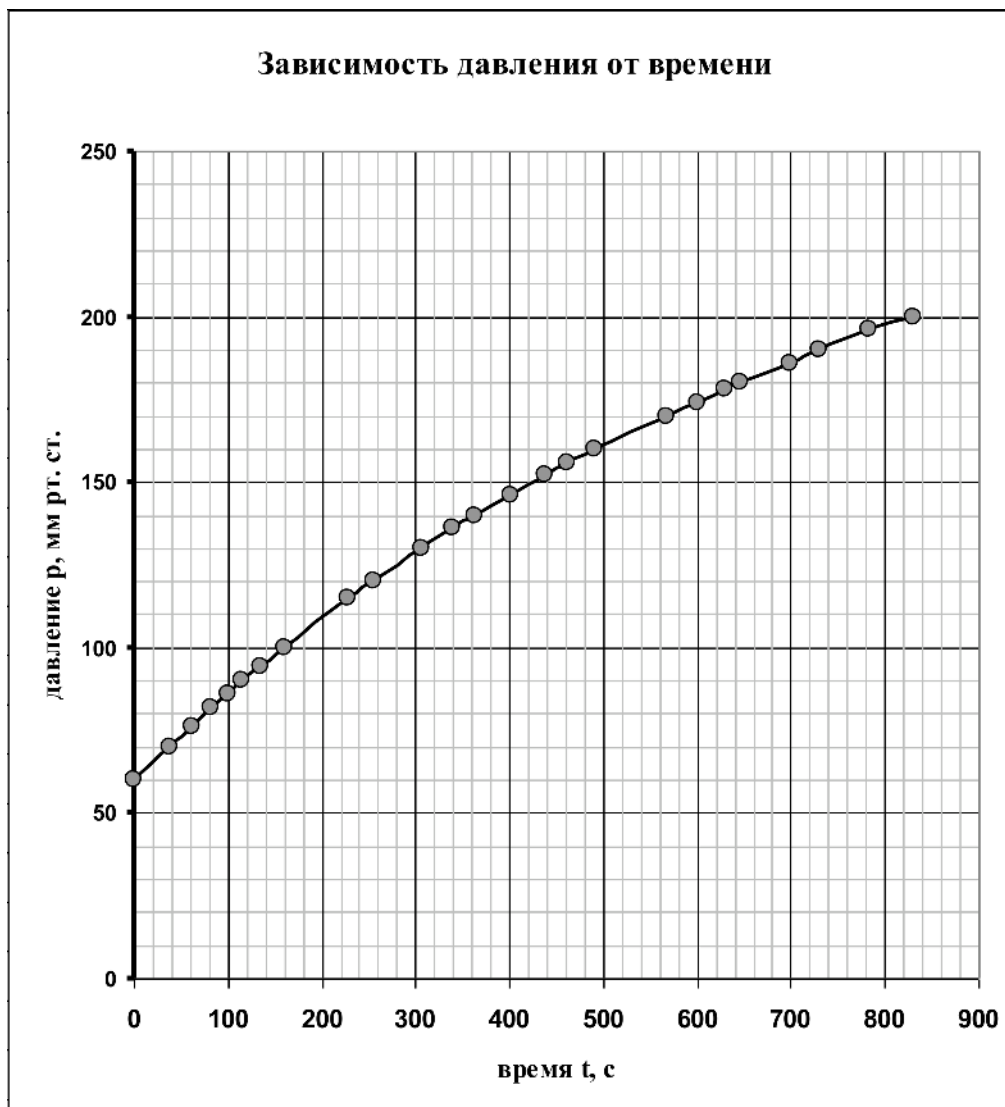
$$V_0 = (700 \pm 11) \text{ см}^3.$$

Часть 2. «Выход джина»

2.1 Результаты измерений зависимости показаний манометра от времени приведена в таблице 2. и на рисунке.

Таблица 2. Зависимость давления p_m от времени t .

$t, \text{ c}$	$p_m, \text{ мм рт. ст}$	$\frac{\Delta p_m}{\Delta t}$
0	60	
39	70	0,258
62	76	0,273
83	82	0,263
100	86	0,250
115	90	0,222
136	94	0,222
160	100	0,226
229	115	0,208
256	120	0,195
306	130	0,190
340	136	0,175
363	140	0,161
402	146	0,158
439	152	0,167
462	156	0,154
491	160	0,132
568	170	0,128
600	174	0,129
630	178	0,130
646	180	0,116
699	186	0,119
730	190	0,119
783	196	0,100
830	200	



По измеренным значениям можно рассчитать приближенные значения скорости изменения давления. Для этого предпочтительнее использовать симметричную формулу. При давлении p_i скорость изменения давления

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)_i = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (4)$$

Результаты расчетов этих величин приведены в последнем столбце в таблице 2.

Эта зависимость приведена на графике. Разброс точек заметен, что связано с погрешностью расчета скорости изменения давления. Однако достаточно четко видна линейная зависимость, что подтверждает применимость уравнения, приведенного в условии задачи

$$\frac{\Delta p_m}{\Delta t} = \gamma (p_k - p_m) \quad (5)$$

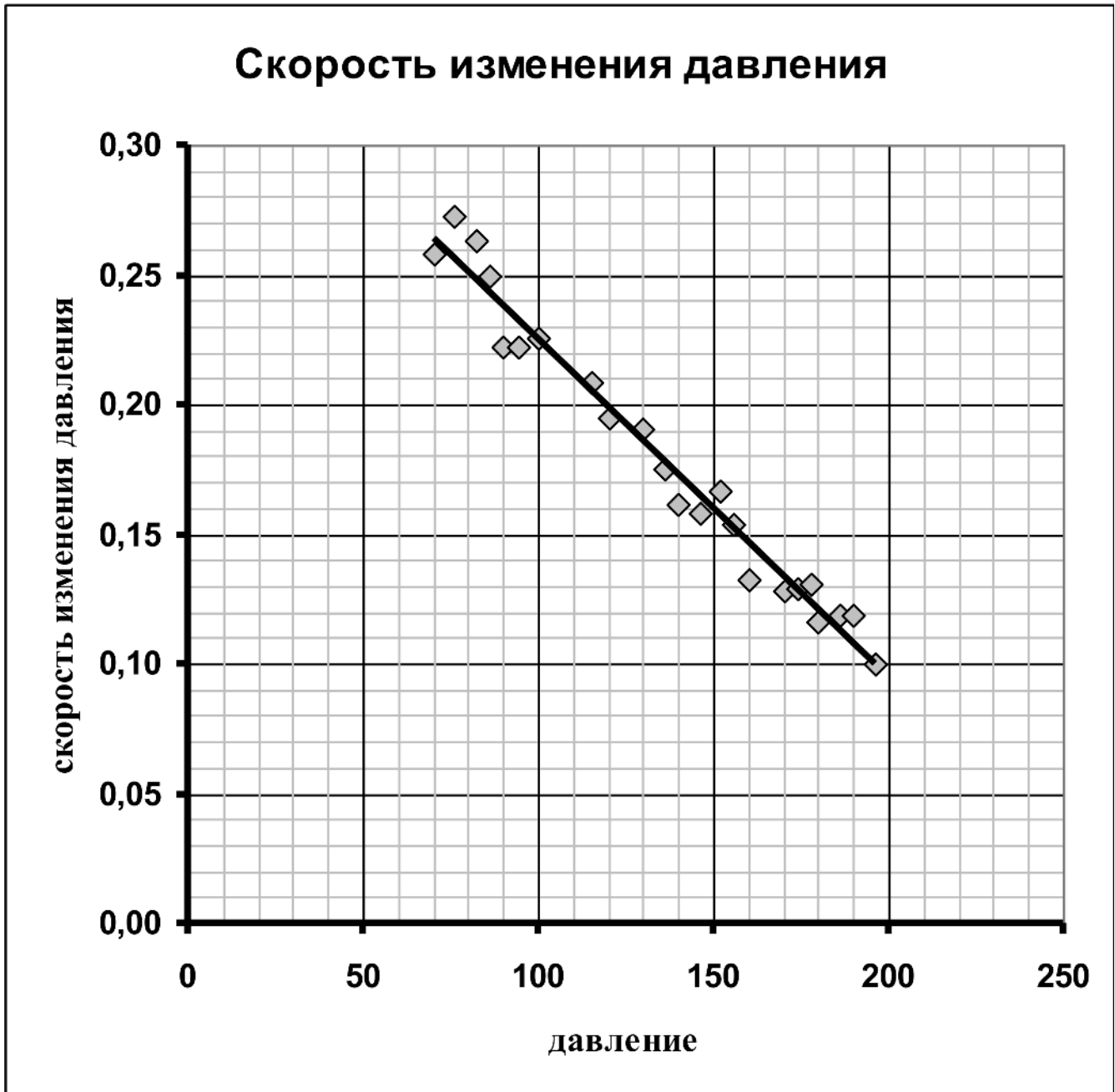
По приведенному графику можно определить параметры линейной зависимости

$$\frac{\Delta p_m}{\Delta t} = ap_m + b. \quad (6)$$

Значения этих параметров равны $a = -1,30 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ $b = 0,355 \frac{\text{мм рт.ст.}}{\text{с}}$. Сравнивая уравнение (6) с уравнением (5), находим значения параметров уравнения (5)

$$\gamma = -a = 1,30 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$$

$$p_k = \frac{b}{\gamma} = 273 \text{ мм рт.ст.} \quad (7)$$



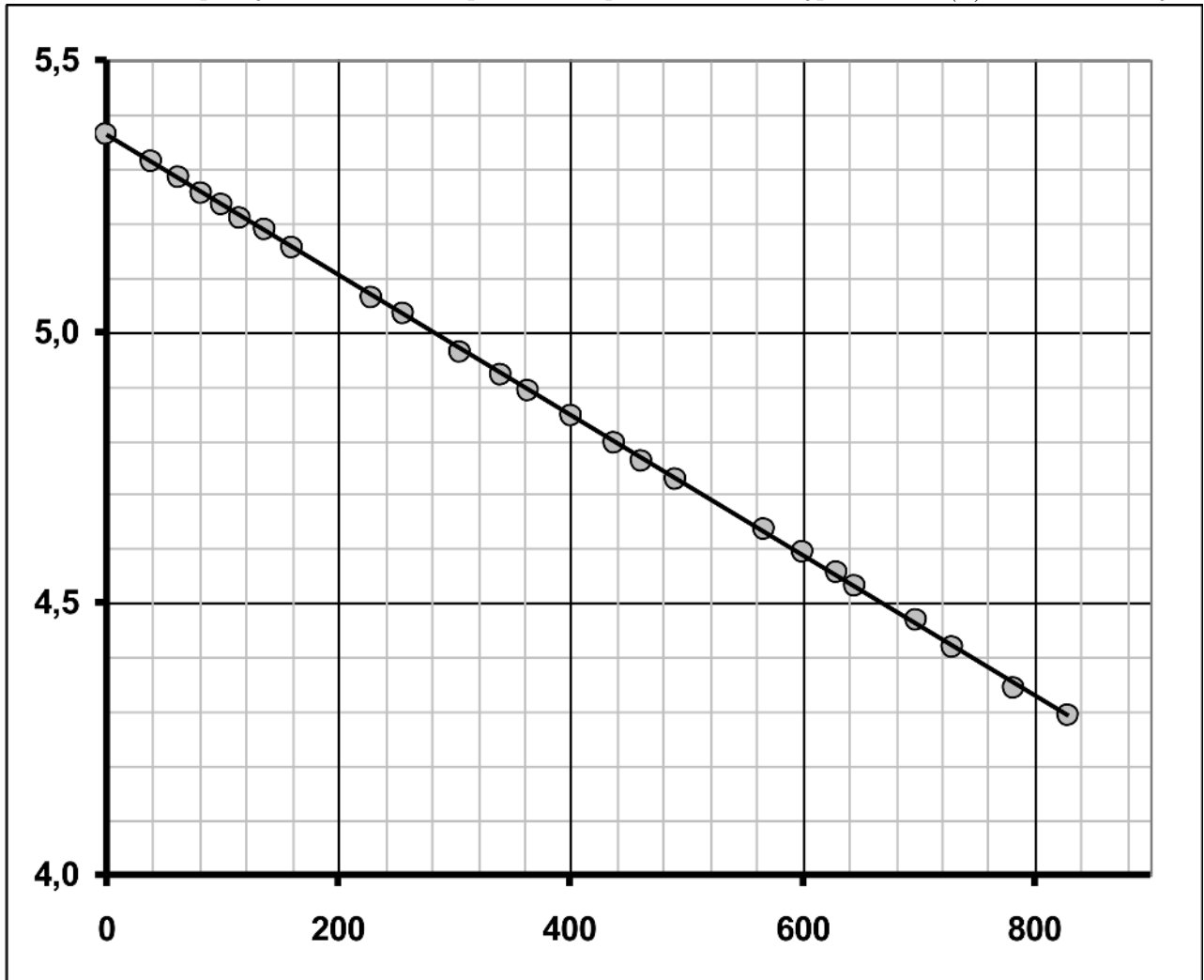
Дополнение, не относящееся к основному решению. Численный расчет производной всегда приводит к большой погрешности, поэтому предпочтительнее обрабатывать интегральные зависимости. Точное решение уравнения (5) имеет вид

$$(p_k - p_m) = (p_k - p_m)_0 \exp(-\gamma t) \quad (8)$$

В полупологарифмическом масштабе эта зависимость линейна

$$\ln(p_k - p_m) = \ln(p_k - p_m)_0 - \gamma t \quad (9)$$

Однако для построения этой зависимости необходимо знать предельное значение давления p_k . Если воспользоваться значением предельного давления, полученного ранее, то график зависимости (9) имеет вид, показанный на рисунке. Как видно все точки практически точно ложатся на прямую, что подтверждает применимость уравнения (5) в данном случае.



2.4 Для расчета массы углекислого газа, который выделится из газированной воды за очень большой промежуток времени следует воспользоваться уравнением идеального газа

$$PV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow m = \frac{MPV}{RT}.$$

В этом уравнении

$V = V_0 - V_1 = 200\text{см}^3$ - объем свободной части установки, после того, как в него залили газированную воду; $P = p_k$ - парциальное давление углекислого газа, выделившегося из воды за большой промежуток времени, $T = 273 + 20 = 293\text{K}$ измеренное значение температуры. Подстановка численных значений приводит к результату

$$m = \frac{MPV}{RT} = \frac{44 \frac{\text{г}}{\text{моль}} 273 \frac{10^5}{760} \text{Па} \cdot 200 \cdot 10^{-6} \text{м}^3}{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} 293\text{K}} \approx 0,13\text{г}.$$

2.5 Параметр γ в уравнении (5) имеет смысл величины, обратной характерному времени выхода растворенного газа. Следовательно, это время $\tau = \frac{1}{\gamma} \approx 800\text{с}$.

За время примерно равное 3τ отклонение давления от предельного значения составит примерно 5%. Таким образом, этот эксперимент должен длиться порядка 1 часа.

¹ Не путайте показатели степеней с углами!