

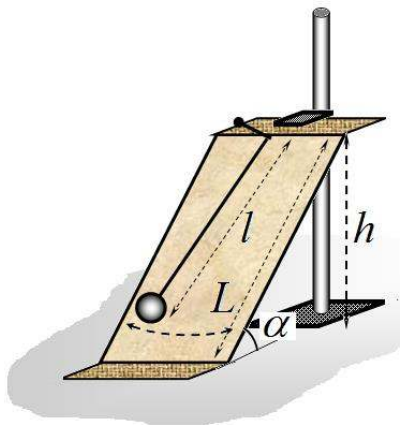
Условие

Задание 10-2 Открой формулу!

Несмотря на то, что вы еще не изучали теорию колебаний, предлагаем вам задачу, в которой вы должны самостоятельно получить и экспериментально проверить формулу для периода колебаний шарика на наклонной плоскости.

Приборы и оборудование: картонная наклонная плоскость со штативом, шарик на нити, линейка, секундомер.

Закрепите лист картона в штативе, как показано на рисунке, к верхней точке привяжите шарик на нити. У вас есть возможность изменять угол наклона плоскости к горизонту (изменяя высоту h) и длину нити l .



Часть 1. Теоретическая.

Период колебаний шарика рассчитывается по формуле

$$T = Cl^{\alpha} g^{\beta} (\sin \alpha)^{\gamma} \quad (1)$$

Где $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ - ускорение свободного падения, α, β, γ - показатели¹ степеней, которые вам необходимо определить, C - безразмерный численный коэффициент.

1.1 Используя метод размерностей, определите показатели степеней α, β . 1.2 С помощью простых физических рассуждений определите показатель степени γ .

Часть 2. Экспериментальные исследования.

Внимание! Следите, чтобы наклонная «плоскость» была действительно плоской! Малые искривления этой поверхности могут существенно повлиять на результаты измерений!

2.1 Исследуйте зависимость периода колебаний маятника от высоты наклонной плоскости h . Укажите, при какой длине нити вы проводили измерения. Постройте график полученной зависимости в таких координатах, чтобы он был линейным, позволяющим определить показатель степени. 2.2. Используя результаты измерений, определите показатель степени γ в формуле (1). Совпадает ли это значение с результатами ваших теоретических измышлений в п.1.2?

2.3 Исследуйте зависимость периода колебаний от длины нити l . Укажите, при какой высоте h вы проводили измерения. Постройте график полученной зависимости, в таких координатах, чтобы он был линейным, позволяющим определить показатель степени. 2.4 Используя результаты измерений, определите показатель степени α в формуле (1). Совпадает ли это значение с результатами ваших теоретических измышлений в п.1.2?

2.5 Используя все результаты измерений, определите численное значение коэффициента C в формуле (1). Оцените погрешность найденного значения.

Решение

Задание 10-2 Открой формулу!

Часть 1. Теоретическая.

Подставим размерности величин, входящих в формулу (1):

$$c = \mathcal{M}^\alpha \left(\frac{\mathcal{M}}{c^2} \right)^\beta \quad (1)$$

Для совпадения размерностей правой и левой частей необходимо выполнение условий

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

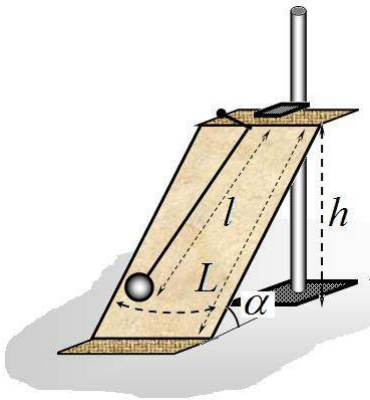
При движении по наклонной плоскости на характер движения оказывает влияние только проекция силы тяжести на наклонную плоскость. Т.е. во всех формулах должна фигурировать только произведение $g \sin \alpha$. Следовательно, последний не известный показатель степени в формуле для периода равен $\gamma = \beta = -\frac{1}{2}$. Таким образом, формула для периода колебаний маятника на наклонной плоскости имеет вид

$$T = C \sqrt{\frac{l}{g \sin \alpha}}. \quad (3)$$

Безразмерный коэффициент C не может быть определен методом размерностей.

Часть 2. Экспериментальные исследования.

В работе использовалась установка с наклонной плоскостью длиной $L = 39$ см



2.1 Изучение зависимости периода колебаний от высоты наклонной плоскости h проводились при длине маятника $l = 35$ см.

Результаты измерений представлены в таблице 1. Проводилось несколько (3-4) измерений времен 5 колебаний. После чего проводилось усреднение по всем результатам.

Таблица 1. Зависимость периода от высоты наклонной плоскости.

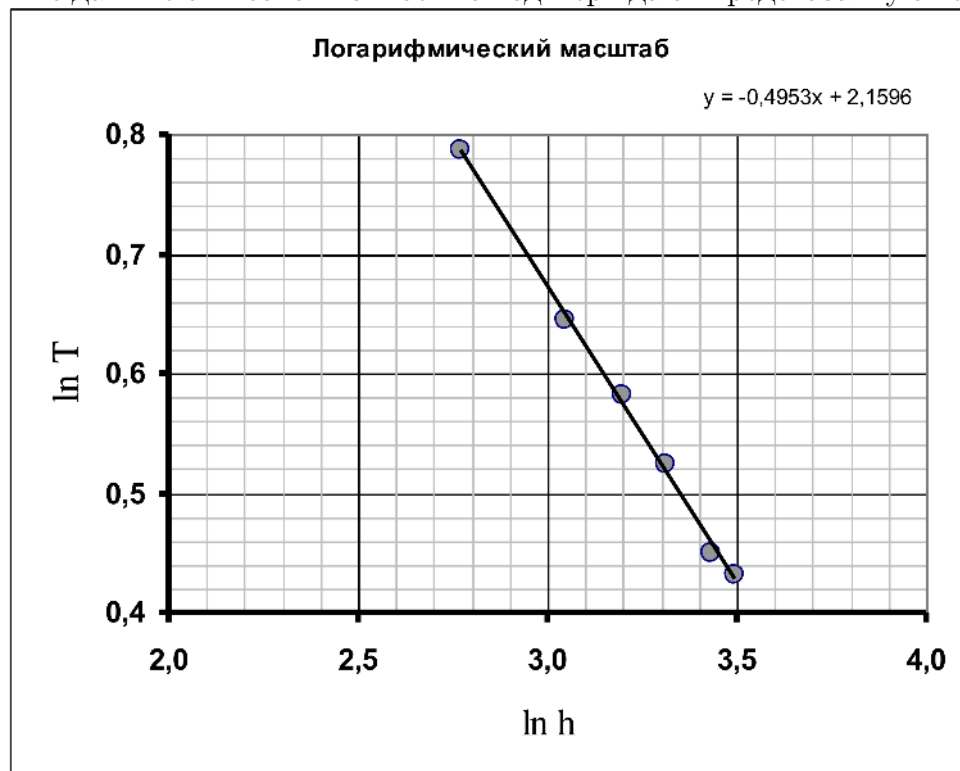
h , см	Времена 5 колебаний				T , с	T^{-2} , с $^{-2}$	$\ln h$	$\ln T$
	t_1 , с	t_2 , с	t_3 , с	t_4 , с				
31,0	15,68	15,60	15,74		1,567	0,407	3,434	0,449
27,5	8,47	8,41	8,44		1,688	0,351	3,314	0,524
24,5	9,01	8,81	9,01		1,789	0,313	3,199	0,581
21,0	9,60	9,55	9,43	9,55	1,907	0,275	3,045	0,645
16,0	10,97	11,04	10,93	11,00	2,197	0,207	2,773	0,787
33,0	7,55	7,69	7,69	7,84	1,539	0,422	3,497	0,431

Так как длина наклонной плоскости постоянна, величина $h = L \sin \alpha$ пропорциональна синусу угла наклона плоскости. Поэтому можно анализировать вид зависимости от высоты h .

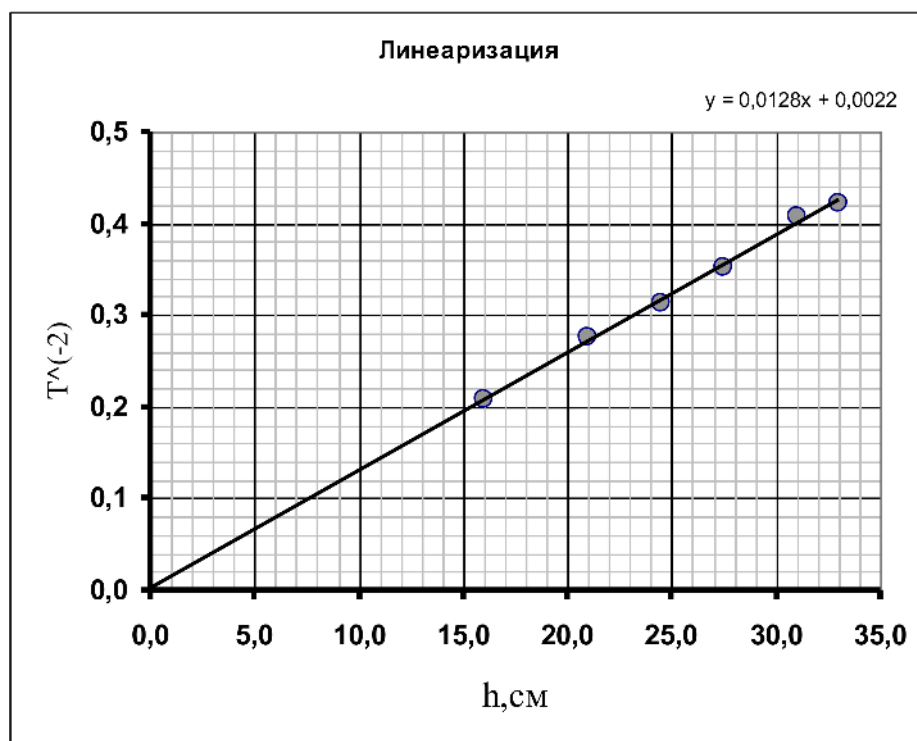
Для проверки предсказанной зависимости можно поступать различными способами. Самым предпочтительным является анализ зависимости в двойном логарифмическом масштабе. Так как $T = Ah^\gamma$, то

$$\ln T = \ln A + \gamma \ln h. \quad (4)$$

В этом масштабе зависимость должна быть линейной, причем коэффициент наклона равен показателю степени γ . График этой зависимости показан на рисунке. График, во-первых, линейный, что подтверждает степенной характер зависимости $T(h)$ или $T(\sin \alpha)$. Во-вторых, коэффициент наклона графика равен (МНК) $\gamma = -0,50 \pm 0,02$. Тем самым экспериментальные данные с высокой точностью подтверждают предсказанную теоретическую зависимость.



Возможны и другие виды линеаризации, например, показанная на следующем рисунке, где представлена зависимость $T^{-2}(h)$. Этот график также подтверждает теоретическую зависимость.



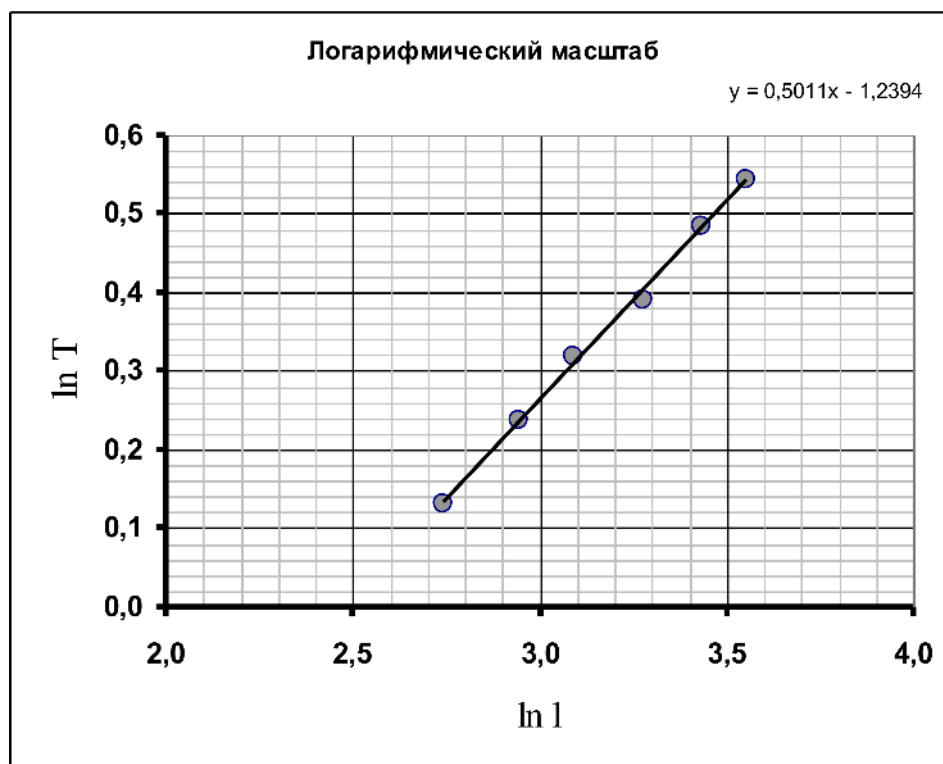
2.4 Исследования зависимости периода колебаний от длины нити проведены при высоте наклонной плоскости $h = 26\text{см}$. Методика проведения измерений и их обработки аналогично предыдущей. Результаты измерений приведены в таблице 2. **Таблица 2.**

l , см	Времена 5 колебаний				T , с	$\ln l$	$\ln T$	T^2 , с ²
	t_1 , с	t_2 , с	t_3 , с	t_4 , с				
35,0	8,59	8,72	8,51	8,59	1,721	3,555	0,543	2,960
31,0	8,08	8,14	8,06	8,20	1,624	3,434	0,485	2,637
26,5	7,33	7,40	7,43	7,37	1,477	3,277	0,390	2,180
22,0	6,90	6,90	6,84	6,89	1,377	3,091	0,320	1,895
19,0	6,33	6,36	6,36	6,32	1,269	2,944	0,238	1,609
15,5	5,68	5,75	5,67	5,69	1,140	2,741	0,131	1,298

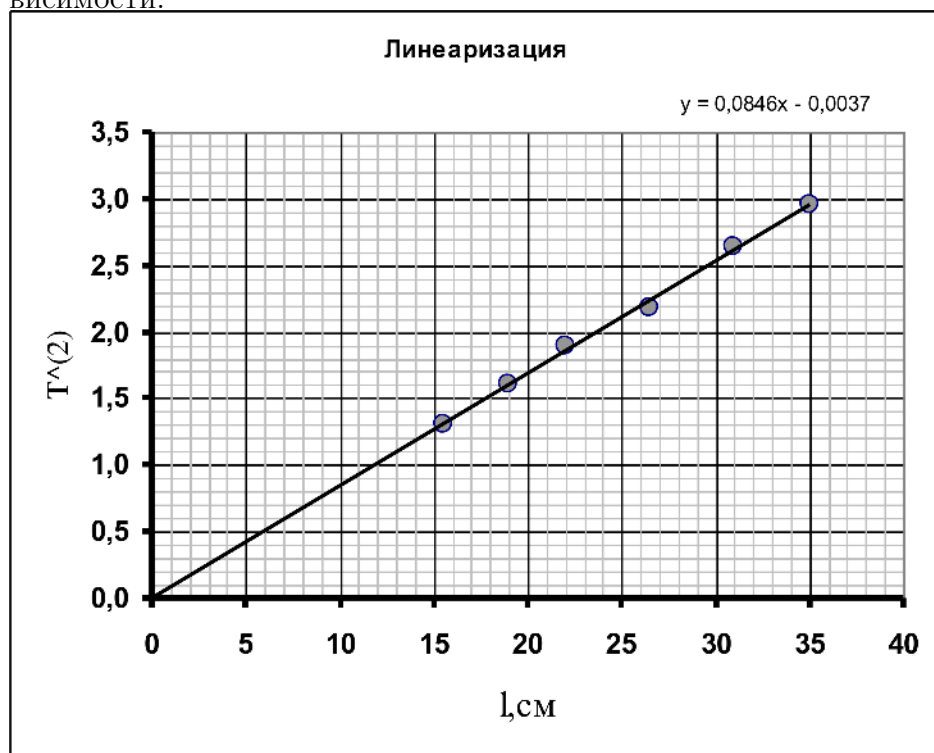
И в этом случае самым надежным способом обработки является построение зависимости в двойном логарифмическом масштабе. (см. Рис). Эта зависимость также линейна. Коэффициент наклона (МНК) равен

$$\alpha = 0,50 \pm 0,03$$

Таким образом, и эта серия экспериментов подтверждает теоретическую зависимость.



Приведем пример еще одной возможной успешной линейаризации, а именно, зависимость $T^2(l)$, которая также однозначно свидетельствует в пользу высказанной гипотезы о характере зависимости.



2.4 Проведенные измерения подтвердили справедливость формулы для периода колебаний маятника на наклонной плоскости. Перепишем эту формулу, включив в нее непосредственно измеряемые величины (использовано выражение для синуса угла наклона плоскости)

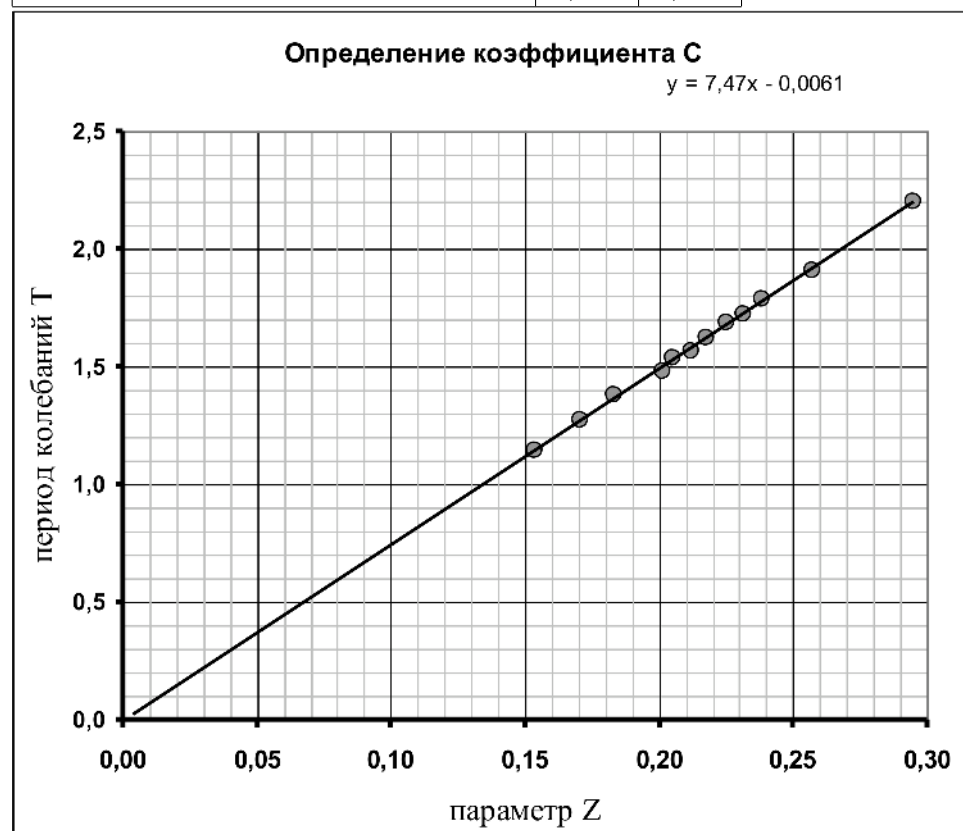
$$T = C \sqrt{\frac{lL}{gh}}. \quad (4)$$

Для усреднения всех результатов измерений можно построить зависимость периода колебаний

От рассчитываемого параметра $Z = \sqrt{\frac{lL}{gh}}$. В таблице 3 приведены результаты расчетов этого параметра для обеих серий измерений. Рядом приведен график этой зависимости.

Таблица 3.

	Z, c	T, c
Зависимость от длины нити	0,231	1,721
	0,218	1,624
	0,201	1,477
	0,184	1,377
	0,171	1,269
	0,154	1,140
Зависимость от высоты плоскости	0,212	1,567
	0,225	1,688
	0,238	1,789
	0,258	1,907
	0,295	2,197
	0,205	1,539



Этот график показывает, что результаты всех измерений прекрасно согласуются между собой. Коэффициенты этой зависимости, рассчитанные по МНК, оказались равными

$$a = 7,47 \pm 0,18$$

$$b = -0,01 \pm 0,04.$$

Расчет показывает, что зависимость является прямо пропорциональной. Коэффициент пропорциональности равен

$$C = 7,47 \pm 0,18.$$

Отметим, что данный коэффициент отличен от 2π . Это связано с тем, что в процессе движения шарик катается по наклонной плоскости. Теоретическое значение этого коэффициента

$$\overline{C} = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}} \approx 7,43.$$

Таким образом, и численное значение измеренного коэффициента совпадает с теоретическим значением.

¹ Не путайте показатели степеней с углами!