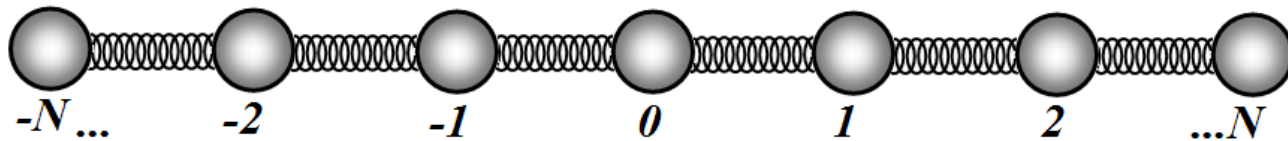


Условие

Задача 11-2 Собственные колебания.

В задаче рассматриваются собственные колебания симметричной цепочки, состоящей из $(2N+1)$ одинаковых шариков, соединенных одинаковыми пружинами. Масса каждого шарика m , жесткость каждой пружины γ , масса пружин пренебрежимо мала. Внешние силы на цепочку не действуют.

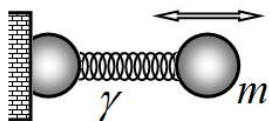


Мы будем рассматривать только симметричные продольные колебания. Поэтому достаточно описать движение половины цепочки, полагая при этом, что центральный шарик неподвижен. Для описания движения будем использовать функции $x_k(t)$ - зависимость смещения k -того шарика от его положения равновесия.

Собственным колебанием называется такое колебание, при котором все шарики колеблются по гармоническому закону с одной частотой, в одной фазе, но с разными амплитудами. Частоты таких колебаний называются собственными частотами.

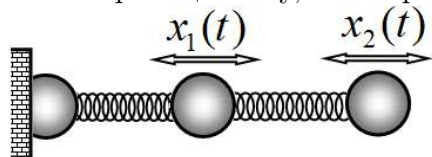
Часть 1. Один движущийся шарик.

1.1 Найдите собственную круговую частоту ω_0 колебаний цепочки, в которой движется только один шарик.



Часть 2. Два движущихся шарика.

Рассмотрим цепочку, в которой движутся два шарика.

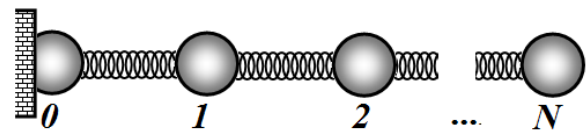


2.1 Запишите уравнения, описывающие движения шариков. В качестве единственного параметра этих уравнений используйте частоту ω_0 , найденную в первой части задачи.

2.2 Определите собственные частоты колебаний шариков ω_1 и ω_2 . Найдите при каком отношении амплитуд колебаний каждого шарика их колебания будут проходить с одной частотой.

Часть 3. Длинная цепочка.

Рассмотрим собственные колебания цепочки, состоящей из N движущихся шариков.



3.1 Запишите в общем виде уравнения, описывающие движение шарика номер k . Укажите какие дополнительные условия следует наложить на крайние шарики $k=0$ и $k=N$.

3.2 Определите все собственные частоты ω_j продольных колебаний данной цепочки. Сколько собственных частот имеет цепочка?

Гуманитарная помощь! Для решения поставленной задачи следует выполнить следующую последовательность действий:

3.2.1 Представьте решение системы уравнений движения в виде $x_k = A_k \cos \omega t$ и получите систему уравнений для амплитуд колебаний шариков A_k .

3.2.2 Зависимость амплитуд колебаний от номера шарика может быть записана в виде $A_k = A \sin(k\varphi)$. Приведите качественные обоснования для поиска решений в таком виде. Получите уравнение для определения φ в зависимости от частоты колебаний ω .

3.2.3 Используя уравнение для последнего шарика $k = N$ определите возможные значения параметра φ , при котором это уравнение выполняется.

3.2.4 Сравнивая результаты, полученные в п.3.2.2 и 3.2.3, получите формулу для собственных частот колебаний.

Решение

Задача 11-2 Собственные колебания.

Часть 1. Один движущийся шарик.

Уравнение движения шарика имеет вид

$$ma = -\gamma x \quad (1)$$

Где x - смещение шарика от положения равновесия, a - его ускорение. Это уравнение является уравнением гармонических колебаний с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}. \quad (2)$$

Часть 2. Два движущихся шарика.

2.1 Уравнения движения шариков следуют из второго закона Ньютона и закона Гука

$$\begin{aligned} ma_1 &= -\gamma x_1 + \gamma(x_2 - x_1) \\ ma_2 &= -\gamma(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (3)$$

Или

$$\begin{aligned} a_1 &= -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \\ a_2 &= \omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы найти частоты собственных колебаний представим решение уравнений (4) в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos \omega t \\ x_2 &= A_2 \cos \omega t \end{aligned} \quad (5)$$

Где A_1, A_2 - амплитуды колебаний первого и второго шариков. Подстановка функций (5) в уравнения (4) дает уравнения для амплитуд

$$\begin{aligned} -\omega^2 A_1 &= -2\omega_0^2 A_1 + \omega_0^2 A_2 \\ -\omega^2 A_2 &= \omega_0^2 A_1 - \omega_0^2 A_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Выразим из обоих уравнений (6) отношение амплитуд

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2}{2\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}. \quad (7)$$

Чтобы система уравнений (6) была совместна необходимо, чтобы найденные отношения (7) были равны, что дает уравнение для определения собственных частот колебаний

$$\frac{\omega_0^2}{2\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \frac{1}{2 - z} = 1 - z. \quad (8)$$

Здесь обозначено $z = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$. Решая это уравнение, получим

$$(2 - z)(1 - z) = 1 \Rightarrow z^2 - 3z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} \Rightarrow z_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_{21} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}. \quad (9)$$

Таким образом, собственные частоты собственных колебаний данной системы равны

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}, \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}. \quad (10)$$

Отношения амплитуд колебаний шариков при этих колебаниях будут соответственно равны

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = 1 - z; \Rightarrow \left(\frac{A_1}{A_2} \right)_1 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad \left(\frac{A_1}{A_2} \right)_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \quad (11)$$

Часть 3. Длинная цепочка.

3.1 Уравнение движения произвольного шарика имеет вид

$$ma_k = \gamma(x_{k+1} - x_k) - \gamma(x_k - x_{k-1}). \quad (12)$$

Или

$$a_k = \omega_0^2(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}). \quad (13)$$

Для $k = 0$ следует положить $x_0 = 0$. Для крайнего шарика можно отбросить первое слагаемое в уравнении (12). Но проще и красивее распространить уравнение (13) на фиктивный $(N + 1)$ шарик, причем считать, что $x_{N+1} = x_N$.

3.2 Послужим по пути, подсказанному «гуманитарной помощью». Подставим пробное решение $x_k = A_k \cos \omega t$ в уравнение (13). После сокращения получим уравнение для амплитуд

$$-\omega^2 A_k = \omega_0^2(A_{k+1} - 2A_k + A_{k-1}), \quad (14)$$

Которое перепишем в симметричном виде

$$A_{k+1} - \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) A_k + A_{k-1} = 0. \quad (15)$$

Теперь подставим пробное решение для этого уравнения $A_k = A \sin(k\varphi)$. Обоснование такого предсказания заключается в том, что фактически свободные колебания являются стоячими волнами на цепочке. Кроме того, синус выбран, чтобы удовлетворить условию $x_0 = 0$. Указанная подстановка дает:

$$\sin((k + 1)\varphi) + \sin((k - 1)\varphi) = \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \sin(k\varphi). \quad (16)$$

Используя известную тригонометрическую формулу для суммы синусов, получим

$$2 \sin \frac{(k+1)\varphi + (k-1)\varphi}{2} \cos \frac{(k+1)\varphi - (k-1)\varphi}{2} = \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \sin(k\varphi)$$

$$2 \sin(k\varphi) \cos \varphi = \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \sin(k\varphi). \quad (17)$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}$$

Теперь подставим пробное решение во второе граничное условие $x_{N+1} = x_N$ и преобразуем его

$$\begin{aligned} \sin((N+1)\varphi) = \sin(N\varphi) &\Rightarrow \sin((N+1)\varphi) - \sin(N\varphi) = 0 \Rightarrow \\ 2 \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\varphi\right) \cos \frac{\varphi}{2} = 0 &\Rightarrow \end{aligned} \quad (18)$$

Так $\cos \frac{\varphi}{2}$ отличен от нуля (иначе цепочка не колеблется!), то

$$\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\varphi\right) = 0 \Rightarrow (2N+1)\varphi_j = 2\pi j \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (19)$$

Итак, параметр φ может принимать только дискретный ряд значений

$$\varphi_j = \frac{2\pi}{2N+1}j \quad (20)$$

Наконец, с помощью формулы (17) находим частоты собственных колебаний

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \Rightarrow \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} = 1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \omega_j = 2\omega_0 \sin \frac{\varphi_j}{2},$$

После подстановки выражения (20), получаем окончательную формулу для частот колебаний

$$\omega_j = 2\omega_0 \sin \frac{\varphi_j}{2} = 2\omega_0 \sin \left(\frac{\pi}{2N+1}j\right)$$

В этой формуле j изменяется в пределах от 1 до N , т.к. дальнейшее увеличение этого параметра приведет к повторению частот. Поэтому число собственных частот равно числу подвижных шариков, т.е. N

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$