

Условие

Задача 11-3. Почему январь холоднее декабря?

В наших широтах зимой дни короче, чем летом. Поэтому Земля получает меньше энергии от Солнца, поэтому зимой холоднее. Очевидно! Однако, самые короткие дни в декабре, а самый холодный месяц – январь. В этой задаче вам предстоит объяснить этот сдвиг во времени.

Конечно, описание (и предсказание) погоды задача не благодарная и сомнительно, что когда-нибудь будет точно решена – слишком много параметров, слишком много случайных факторов, слишком неустойчивы уравнения. Тем не менее, глобальные усредненные оценки климатических характеристик можно получить, основываясь на простых моделях.

Для решения задачи воспользуйтесь следующими подсказками.

1. **Солнечная постоянная** – количество солнечной энергии, падающей на площадку единичной площади, расположенную перпендикулярно падающим лучам в единицу времени $q_0 = 1,4 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}$.
2. **Закон Стефана-Больцмана.** Мощность теплового излучения, испускаемого нагретым черным телом с площадки единичной площади, определяется по формуле

$$\varepsilon = \sigma T^4 \quad (1)$$

T – абсолютная температура тела, $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$. То, что Земля не является черным телом, что в данном случае роли не играет, потому что во сколько раз меньше поглощает, во столько же раз меньше испускает. Короче – можете считать Землю абсолютно черным телом.

3. Воздух считать идеальным двухатомным газом с молярной массой $M = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$. Молярная теплоемкость двухатомного газа при изохорном процессе равна $C_V = \frac{5}{2} R$, $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – универсальная газовая постоянная.

4. Атмосферное давление считайте равным $P_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Па

5. Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, плотность воды $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения принять равным $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Часть 1. Средняя температура.

1.1 Рассчитайте среднюю температуру земной поверхности.

Для оценки можно принять, что температура Земной поверхности постоянна во всех точках и не зависит от времени.

Часть 2. Лирическое отступление.

На первый взгляд задачи этой части не имеют отношения к рассматриваемой проблеме, но если присмотреться...

2.1 Небольшое тело массы m движется по прямой в вязкой среде под действием переменной силы, зависящей от времени по закону $F = F_0 \cos \omega t$. Сила сопротивления среды, действующая на тело, прямо пропорциональна его скорости $\vec{F}_{\text{сопр.}} = -\beta \vec{v}$ (β – известный коэффициент пропорциональности). В каких пределах изменяется скорость тела? Рассчитайте длительность промежутка времени между моментом времени, когда скорость достигает максимального значения, и моментом времени, при котором максимальна действующая сила (время запаздывания τ).

Подсказка. Поищите решение в очевидном виде

$$v = v_0 \cos \omega(t - \tau) \quad (2)$$

Причем считайте, что $\omega \tau \ll 1$.

2.2 Емкость конденсатора C , электрическое сопротивление² между его обкладками равно R . Конденсатор включен в цепь, сила тока в которой изменяется по закону $I = I_0 \cos \omega t$. Найдите

время задержки τ между максимумом силы тока в цепи и максимумом заряда на обкладках конденсатора. Используйте приближение $\omega\tau \ll 1$. Укажите физический (наглядный) смысл этого приближения.

Часть 3. Теплоемкость земной атмосферы.

Рассмотрим высокий (как высота земной атмосферы) столб воздуха с площадью поперечного сечения S . Можете считать, что воздух находится в цилиндрическом сосуде, высота которого составляет несколько сотен километров, короче – до бесконечности... Температуру воздуха будем считать не зависящей от высоты и равной T . Давление воздуха на дно сосуда обозначим P_0 .

3.1 Найдите массу воздуха в этом сосуде. Рассчитайте массу атмосферного столба, приходящуюся на 1 м^2 поверхности Земли. 3.2 При изменении температуры воздуха расширяется. Каким является процесс расширения воздуха? Ответ обоснуйте. 3.3 Чему равна молярная теплоемкость воздуха в этом процессе? 3.4 Чему равна теплоемкость воздуха в этом сосуде? *Для оценки теплоемкости Земли к теплоемкости атмосферы следует добавить теплоемкость поверхности. Приблизительно можно считать, что земля прогревается на $1,0 \text{ м}$ и ее удельная теплоемкость примерно равна удельной теплоемкости воды.*

3.5 Рассчитайте численное значение теплоемкость земли, приходящейся на 1 м^2 ее поверхности.

Часть 4. Так почему же январь холоднее декабря?

Рассмотрим следующую упрощенную модель. Будем считать, что «перемешивание» теплоты и воздушных масс у поверхности Земли происходит только в широтном направлении. То есть мы можем рассматривать некоторую узкую полосу между двумя земными параллелями. Количество энергии, поступающей от Солнца на эту полосу,

— 2 2

периодически изменяется в течение года. Для оценок можно принять, что усредненный (за время большее суток) поток энергии на единицу площади зависит от времени по закону

$$q = q_0 + b \cos \omega t. \quad (5)$$

Где b - некоторая постоянная. Колебания потока теплоты приводят к колебаниям усредненной температуры, поэтому зависимость удобно представить температуру в виде

$$T = \bar{T} + \delta(t) \quad (6)$$

Причем можно считать, что $\delta \ll \bar{T}$.

4.1 Укажите основную причину того, что поток энергии на северное полушарие зависит от времени.

4.2 Чему равна величина ω в формуле (5)?

4.3 Получите уравнение, описывающее изменение величины δ в формуле (6).

4.4 Определите время задержки между минимумом солнечной энергии, поступающей на поверхность земли, и минимумом температуры.

Решение

Задача 11-3 Почему январь холоднее декабря?

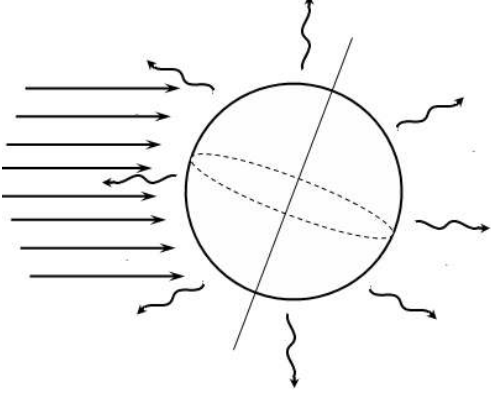
Часть 1. Средняя температура.

Необходимо использовать условие теплового баланса: количество энергии, поступающей от Солнца, равно энергии, испускаемой Землей. Только необходимо учесть, что энергия от Солнца поступает с одной стороны, а Землей излучается во все стороны. С учетом этого обстоятельства получим уравнение

$$q_0 \cdot (\pi R^2) = \sigma T^4 \cdot (4\pi R^2)$$

Из которого следует, что средняя температура оценивается выражением

$$\bar{T} = \sqrt[4]{\frac{q_0}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1,4 \cdot 10^3}{4 \cdot 5,7 \cdot 10^{-8}}} \approx 280 K$$



Часть 2. Лирическое отступление.

2.1 Для того, чтобы найти время задержки необходимо найти закон изменения скорости тела со временем. Для этого надо использовать уравнение второго закона Ньютона

$$ma = F_0 \cos \omega t - \beta v$$

Чтобы уменьшить число параметров перепишем это уравнение в виде

$$a + \gamma v = f_0 \cos \omega t,$$

Где обозначено $\gamma = \frac{\beta}{m}$, $f_0 = \frac{F_0}{m}$. Теперь воспользуемся подсказкой. Зависимость скорости от времени описывается функцией

$$v = v_0 \cos \omega(t - \tau),$$

которую при $\omega\tau \ll 1$ можно упростить, используя приближенные формулы $\sin \omega\tau \approx \omega\tau$, $\cos \omega\tau \approx 1$:

$$\begin{aligned} v &= v_0 \cos \omega(t - \tau) = v_0 \cos(\omega t - \omega\tau) = v_0(\cos \omega t \cdot \cos \omega\tau + \sin \omega t \cdot \sin \omega\tau) \approx \\ &\approx v_0(\cos \omega t + \omega\tau \sin \omega t) \end{aligned}$$

В этом же приближении ускорение тела описывается функцией

$$a = \omega v_0(-\sin \omega t + \omega\tau \cos \omega t).$$

Подставим выражения для скорости и ускорения в уравнение (4):

$$\omega v_0(-\sin \omega t + \omega\tau \cos \omega t) + \gamma v_0(\cos \omega t + \omega\tau \sin \omega t) = f_0 \cos \omega t. \quad (8)$$

Чтобы это равенство выполнялось в любой момент времени, необходимо выполнение условий (приравняем коэффициент при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$):

$$\begin{aligned} -\omega + \gamma \cdot \omega \tau &= 0 \\ (\omega^2 \tau + \gamma) v_0 &= f_0 \end{aligned} \quad (9)$$

Из этих формул находим требуемые величины

Время задержки

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m}{\beta}, \quad (10)$$

Амплитуда скорости (с учетом $\omega \tau \ll 1$)

$$v_0 = \frac{f_0}{\omega^2 \tau + \gamma} = \frac{f_0}{\omega^2 \tau + \frac{1}{\tau}} = \tau f_0 = \frac{f_0}{\gamma} = \frac{F_0}{\beta}. \quad (11)$$

Дополнение для скептиков. Не трудно найти и точное решение (4). Если зависимость скорости от времени описывается функцией

$$v = v_0 \cos \omega(t - \tau),$$

То ускорение меняется со временем по закону

$$a = -v_0 \omega \sin \omega(t - \tau).$$

Подставим эти выражения в уравнение движения:

$$\gamma v_0 \cos \omega(t - \tau) - v_0 \omega \sin \omega(t - \tau) = f_0 \cos \omega t.$$

Левую часть этого уравнения преобразуем традиционным способом

$$\begin{aligned} v_0 \cos \omega(t - \tau) - v_0 \omega \sin \omega(t - \tau) &= \\ = v_0 \sqrt{\gamma^2 + \omega^2} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} \cos \omega(t - \tau) - \frac{\omega}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} \sin \omega(t - \tau) \right) &= \\ = v_0 \sqrt{\gamma^2 + \omega^2} \cos(\omega(t - \tau) + \varphi) \end{aligned}$$

Где сдвиг фаз определяется, как $\varphi = \arctg \frac{\omega}{\gamma}$. Чтобы уравнение (7) обращалось в верное тождество при любом t , необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} \varphi - \omega \tau &= 0 \\ v_0 \sqrt{\gamma^2 + \omega^2} &= f_0 \end{aligned}$$

Откуда следует, что амплитуда изменения скорости частицы равна

$$v_0 = \frac{f_0}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{\beta^2 + (m\omega)^2}}.$$

А время задержки между максимумом силы и максимумом скорости равно

$$\tau = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{1}{\omega} \arctg \frac{\omega}{\gamma} = \frac{1}{\omega} \arctg \frac{m\omega}{\beta}.$$

Полагая $\omega \tau \ll 1$, получим выведенные ранее приближенные формулы.

2.2 Конденсатор с утечкой можно представить, как параллельно соединенные резистор и конденсатор (см. рисунок). В этой цепи суммарная сила тока равна сумме сил токов через резистор и конденсатор:

$$I = I_R + I_C. \quad (12)$$

Сила тока через резистор подчиняется закону Ома

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{q}{CR}, \quad (13)$$

где $U = \frac{q}{C}$ - напряжение на конденсаторе (и равное ему напряжение на резисторе), q - заряд на конденсаторе. Наконец, сила тока через конденсатор равно скорости изменения его заряда

$$I_C = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (14)$$

Подставляя значения сил токов в уравнение (12), получим

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} + \frac{q}{RC} = I_0 \cos \omega t. \quad (15)$$

А теперь сравним это уравнение с уравнением (4) – они полностью совпадают (только обозначения другие), поэтому сразу переписываем ответ: зависимость заряда на конденсаторе от времени имеет вид

$$q = q_0 \cos \omega(t - \tau), \quad (16)$$

Где время задержки

$$\tau = RC. \quad (17)$$

максимальный заряд на конденсаторе равен

$$q_0 \approx I_0 RC, \quad (18)$$

Теперь становится понятным и смысл условия $\omega\tau \ll 1 \Rightarrow \tau \ll T$ время разряда конденсатора значительно меньше периода колебаний тока.

Часть 3. Теплостойкость земной атмосферы.

3.1 Так как столб находится в равновесии, то выполняется очевидное условие:

$$P_0 S = mg. \quad (19)$$

Из этого равенства следует, что масса воздуха равна

$$m = \frac{P_0 S}{g} \quad (20)$$

Численный результат удивителен, для площади в 1 м^2 :

$$m = 1,0 \cdot 10^4 \text{ кг} \approx 10 \text{ тонн} \quad (21)$$

3.2 Обратим внимание, что как следует из формулы (20) давление воздуха на дно сосуда не зависит от температуры, т.е. оно постоянно. Мысленно разобьем столб воздуха на тонкие горизонтальные слои. Аналогичный вывод можно сделать и для давления в любом горизонтальном слое: оно остается постоянным при изменении температуры. Толщина слоя изменяется, но давление не изменяется! Следовательно, процесс расширения следует считать изобарным.

3.3 Не сложно показать, что при изобарном процессе молярная теплоемкость описывается уравнением Майера

$$C_P = C_V + R = \frac{7}{2}R. \quad (22)$$

3.4 Полная теплоемкость воздушного столба равна

$$C = \frac{7}{2} \frac{P_0 S}{Mg} R = \frac{7}{2} \frac{1,0 \cdot 10^5}{29 \cdot 10^{-3} 10} 8,31 \approx 1,0 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}. \quad (23)$$

3.5 К данной теплоемкости следует добавить теплоемкость слоя воды

$$C_1 = c_p S h \approx 0,42 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \quad (24)$$

Обратите внимание, что теплоемкость атмосферы более чем в два раза больше теплоемкости слоя воды!

Суммарная теплоемкость 1 m^2 поверхности земли равна

$$C \approx 1,4 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}. \quad (25)$$

Часть 4. Так почему же январь холоднее декабря?

4.1 Главная причина изменения потока теплоты от Солнца – наклон земной оси к плоскости ее орбиты.

4.2 Очевидно, что период изменения равен одному году, поэтому

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ c}^{-1}. \quad (26)$$

4.3 Запишем уравнение теплового баланса с учетом теплоемкости Земли (в расчете на 1 m^2):

$$C \frac{\Delta T}{\Delta t} = q_0 + b \cos \omega t - \sigma T^4 \quad (27)$$

Теперь подставим значение $T = \bar{T} + \delta$. Если $\delta \ll T$, то $\sigma(\bar{T} + \delta)^4 \approx \sigma \bar{T}^4 + 4\sigma \bar{T}^3 \delta$. Тогда уравнение (36) преобразуется к виду

$$C \frac{\Delta(\bar{T} + \delta)}{\Delta t} = q_0 + b \cos \omega t - \sigma \bar{T}^4 - 4\sigma \bar{T}^3 \delta. \quad (28)$$

В этом уравнении $q_0 = \sigma \bar{T}^4$ (как условие теплового баланса в усредненном приближении). Наконец, перепишем (37) в виде

$$\frac{\Delta \delta}{\Delta t} = b \cos \omega t - \frac{4\sigma \bar{T}^3}{C} \delta. \quad (29)$$

А это уравнение совпадет с рассмотренными уравнениями (4) и (15) Поэтому его решение будет аналогичным!

Следовательно, приближенное значение временной задержки равно

$$\tau = \frac{C}{4\sigma T^3} \approx \frac{1,4 \cdot 10^7}{4 \cdot 5,7 \cdot 10^{-8} (280)^3} \approx 2,8 \cdot 10^6 \text{ с} \approx 32 \text{ суток}. \quad (30)$$

Эта величина в 10 раз меньше периода изменения потока энергии. Поэтому использованное приближение вполне применимо.

Как видно, проведенный анализ, даже в рамках приближенных моделей дал прекрасный результат!

Дополнение для скептиков, не входящее в решение задачи.

Почти очевидное заключение о том, что нагрев атмосферы происходит изобарно, можно подтвердить прямым расчетом.

Теплоемкость земной атмосферы. Мысленно разобьем воздушный столб на тонкие слои толщиной h При переходе от слоя номер n к следующему слою давление будет уменьшаться на величину гидростатического давления в этом слое, т.е.

$$P_{n+1} = P_n - \rho gh. \quad (22)$$

Плотность воздуха в слое n зависит от давления в этом слое, эта зависимость следует из уравнения состояния идеального газа¹:

$$PV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{RT}P. \quad (23)$$

Подстановка этого выражения в формулу (22) дает следующий результат

$$P_{n+1} = P_n - \rho_n gh = P_n - \frac{Mgh}{RT} P_n = P_n \xi \quad (24)$$

Где обозначено искомое значение знаменателя прогрессии

$$\xi = \left(1 - \frac{Mgh}{RT}\right) \quad (25)$$

Таким образом, зависимость давления от номера слоя имеет вид

$$P_n = P_0 \left(1 - \frac{Mgh}{RT}\right)^n. \quad (26)$$

Для любителей высшей математики: при бесконечно малой толщине слоя эта формула преобразуется к виду (что можно получить, как с помощью предельного перехода в формуле (26), так и рассматривая выражение (24) как дифференциальное уравнение)

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right). \quad (26a)$$

3.2 Массы воздуха можно вычислить, как сумму масс всех слоев. Так как давление и плотность пропорциональны, то изменение плотности описывается формулой, аналогично формуле (26) для давления. Поэтому масса воздушного столба равна

$$m = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n Sh = \rho_0 Sh \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n = \frac{\rho_0 Sh}{1 - \xi} = \frac{\frac{MP_0}{RT} Sh}{1 - \left(1 - \frac{Mgh}{RT}\right)} = \frac{P_0 S}{g} \quad (27)$$

Такой же результат можно получить, интегрируя формулу (26а). 3.3 Для вычисления высоты центра масс следует воспользоваться определением

$$mH_C = \sum_{n=0}^{\infty} (nh)(\rho_n Sh) \quad (28)$$

Здесь $(\rho_n Sh) = m_n$ - масса слоя n , hn - высота, на которой находится этот слой. Вычислим эту сумму (с использованием формулы $\sum_{n=0}^{\infty} n\xi^n = \frac{\xi}{(1-\xi)^2}$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (nh)(\rho_n Sh) = \rho_0 Sh^2 \sum_{n=0}^{\infty} n\xi^n = \rho_0 Sh^2 \frac{\xi}{(1-\xi)^2} = \frac{P_0 M}{RT} Sh^2 \frac{1 - \frac{Mgh}{RT}}{\left(\frac{Mgh}{RT}\right)^2} = \frac{P_0 S}{g} \cdot \frac{RT}{Mg}.$$

На последнем шаге мы пренебрегли в числителе малым по сравнению с 1 слагаемым $\frac{Mgh}{RT}$ - действительно все наши рассуждения справедливы при очень малых h .

С учетом выражения (27) для массы столба, получаем, что его центр масс находится на высоте

$$H_c = \frac{RT}{Mg} \quad (29)$$

Отметим, интересную и легко запоминающуюся формулу: высота центра масс изотермического столба газа удовлетворяет соотношению

$$\frac{MgH_c}{RT} = 1.$$

Конечно, такой же результат следует и в результате интегрирования!

3.4 При расчете теплоемкости столба необходимо учесть, что при повышении температуры увеличивается не только кинетическая энергия молекул газа (т.е. его внутренняя энергия), но и потенциальная энергия в поля тяжести земли (обозначим изменение этой энергии ΔU_g . Следовательно, теплоемкость воздушного столба равна

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\Delta U_g}{\Delta T}. \quad (30)$$

Первое слагаемое в этой формуле есть теплоемкость газа при изохорном процессе

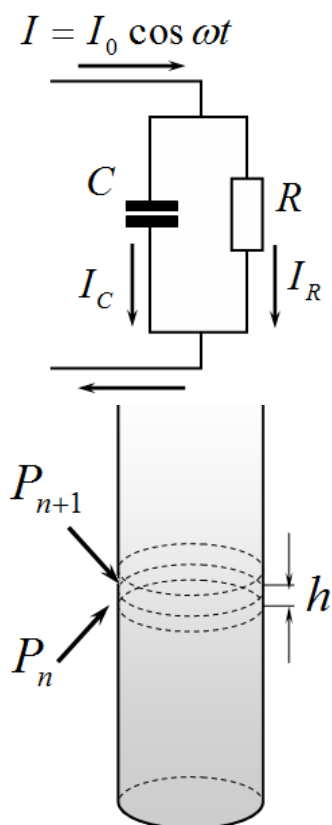
$$\frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{5}{2} \frac{m}{M} R. \quad (31)$$

Второе слагаемое – описывает изменение потенциальной энергии в поле тяжести земли. Оно равно:

$$\frac{\Delta U_g}{\Delta T} = \frac{\Delta(mgH_c)}{\Delta T} = \frac{P_0 S}{Mg} R = \frac{m}{M} R. \quad (32)$$

Итак, полная теплоемкость столба воздуха оказывается равной:

$$C = \frac{7}{2} \frac{m}{M} R = \frac{7}{2} \frac{P_0 S}{M g} R. \quad (33)$$



² Т.е. конденсатор не идеальный, обладает определенной «утечкой».

¹ Не путайте универсальную газовую постоянную ни с радиусом сосуда, ни с сопротивлением конденсатора!