

Условие

Задание 11-2 Закручивание.

Оценка погрешности в данном задании не требуется!

Когда нить маятника, подвешенная в точке C натывается на горизонтальный стержень S , то при некоторой скорости груза маятника A нить может полностью намотаться на стержень. В данном задании Вам необходимо исследовать этот эффект. Обозначим длину нити маятника L (она должна быть примерно равной 0,5 м и оставаться неизменной во всех экспериментах) Расстояния от нижней точки маятника до стержня обозначим l (эту величину следует изменять в ходе эксперимента).

Приборы и оборудование: штатив с двумя стержнями (один для крепления нити, второй для намотки), прочная нить с грузом (гайка), линейка, угломерная шкала.

Часть 1. Теоретическая.

1.1 Рассчитайте, на какой начальный угол φ_0 (от вертикали) нужно отклонить нить описанного выше маятника, чтобы она в процессе движения намоталась на тонкий стержень. Пренебрегайте потерями энергии на сопротивление воздуха, неупругими деформациями нити при столкновении со стержнем, толщиной стержня и т.д.

Прежде чем, приступить к экспериментальной проверке этой зависимости, исследуем возможные механизмы потерь механической энергии

Часть 2. Экспериментальное изучение потерь энергии.

Расположите штатив близко к краю стола, на торце которого прикрепите линейку. Нить маятника должна двигаться близки линейки, так, чтобы вы могли измерять по ней отклонения нити. Эти отклонения будем обозначать x . Остальные обозначения оставляем прежними.

2.1 Измерьте зависимость отклонения нити x_k в крайнем положении от числа совершенных колебаний. Отдельно проведите измерения при больших (больше 10 см) отклонениях и при малых отклонениях (меньше 10см).

Кратко укажите, как вы проводили эти измерения.

2.2 Укажите, какая из измеряемых величин пропорциональна энергии маятника в крайнем положении.

2.4 На основании экспериментальных данных найдите среднее значение относительных потерь механической энергии за один период колебаний $\varepsilon_1 = \frac{\Delta E}{E}$ (при больших и малых отклонениях). Обоснуйте свои расчеты линеаризованным графиком зависимости энергии от числа колебаний.

2.5 Расположите в нижней части штатива стержень, так чтобы нить в процессе движения натывалась на него. Отклоняйте маятник на такой угол, чтобы нить изгибалась при соприкосновении со стержнем, но не наматывалась на него. Такое движение очень похоже на удар – нить также быстро отскакивает!

Проведите аналогичные измерения и определите относительные потери энергии $\varepsilon_2 = \frac{\Delta E}{E}$ в этом случае (достаточно провести одну серию измерений)

2.6 Сравните полученные значения, укажите какая из причин (сопротивление воздуха или «неупругость» удара) приводит к большим потерям энергии.

Часть 3. Наметка.

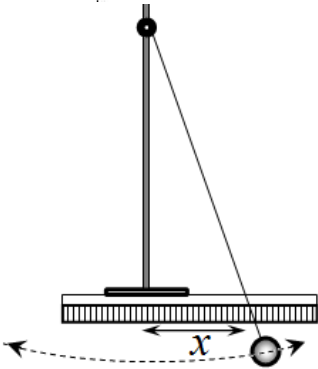
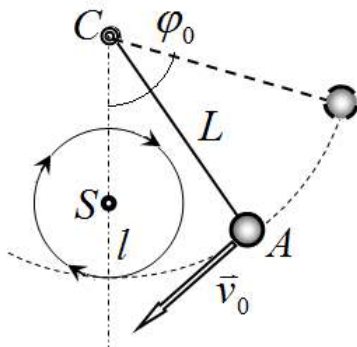
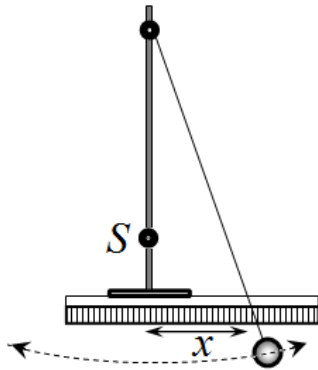
В верхней части штатива закрепите лист картона с угломерной шкалой для измерения начального угла отклонения нити φ_0

3.1 Исследуйте зависимость угла φ_0 (при котором нить начинает накручиваться на стержень) от положения стержня l .

3.2 Постройте график полученной зависимости. Можете преобразовать (например, линеаризовать) свою зависимость для большей наглядности и возможности сравнения их с теорети-

ческой формулой, полученной в первой части данного задания.

3.4 Укажите существенные причины, объясняющие возможные различия между теоретическими и экспериментальными зависимостями.



Решение

Задание 11-2 Закручивание.

Часть 1. Теоретическая.

Чтобы груз на нити сделал полный оборот мало того, чтобы он поднялся в верхнюю точку, дополнительно необходимо, что бы в верхней точке он имел скорость, достаточную для того, чтобы нить оставалась натянутой.

Эта скорость легко находится из уравнения 2 закона Ньютона:

$$\frac{mv_1^2}{l} = mg. \quad (1)$$

Следовательно, в верхней точке кинетическая энергия груза равна

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{1}{2}mgl \quad (2)$$

Теперь запишем закон сохранения энергии от начальной точки траектории до верхней точки намотки:

$$mgL(1 - \cos \varphi_0) = 2mgl + \frac{1}{2}mgl = \frac{5}{2}mgl. \quad (3)$$

Из этого уравнения следует, что начальный угол отклонения должен удовлетворять условию

$$(1 - \cos \varphi_0) = \frac{5l}{2L} \quad (4)$$

Часть 2. Экспериментальное изучение потерь энергии.

Все измерения проводились при длине нити, равной $L = 685$ мм

При больших отклонениях амплитуда колебаний убывает быстро, поэтому удобнее проводить измерения следующим образом: отклонить нить на некоторую начальную величину (в наших измерениях $x_0 = 20$ см) затем измерить отклонение после определенного числа колебаний. Иными словами: задавать число колебаний k - измерять x_k . В таблице приведены результаты таких измерений

Таблица 1.

k	x_1 , см	x_1 , см	x_1 , см	$\langle x \rangle$	E	$\ln E$
0				20	400,00	5,99
2	18,2	18,4	18,3	18,30	334,89	5,81
4	16,7	17,1	17,2	17,00	289,00	5,67
6	16,1	16,2	16,1	16,13	260,28	5,56
8	14,8	15,2	15,1	15,03	226,00	5,42
10	14,3	14,2	14,0	14,17	200,69	5,30
12	13,6	13,2	13,4	13,40	179,56	5,19
14	12,4	12,3	12,5	12,40	153,76	5,04
16	11,9	11,8	11,8	11,83	140,03	4,94
18	11,3	11,2	11,1	11,20	125,44	4,83
20	10,9	10,6	10,7	10,73	115,20	4,75

Для каждого числа колебаний измерения проводились три раза, после чего рассчитывалось среднее значение.

Не сложно показать, что энергия пропорциональна квадрату отклонения (при $x \ll L$). Действительно, когда груз находится в крайнем положении, он обладает потенциальной энергией (относительно нижней точки)

$$E = mg\Delta h = mg \left(L - \sqrt{L^2 - x^2} \right) \approx \frac{mg}{2L} x^2 \quad (5)$$

В таблице 1. В качестве энергии использован именно квадрат отклонения. Если относительные потери энергии за один период колебаний приблизительно постоянны, то энергия после k колебаний убывает в геометрической прогрессии:

$$E_k = E_0(1 - \varepsilon)^k \quad (6)$$

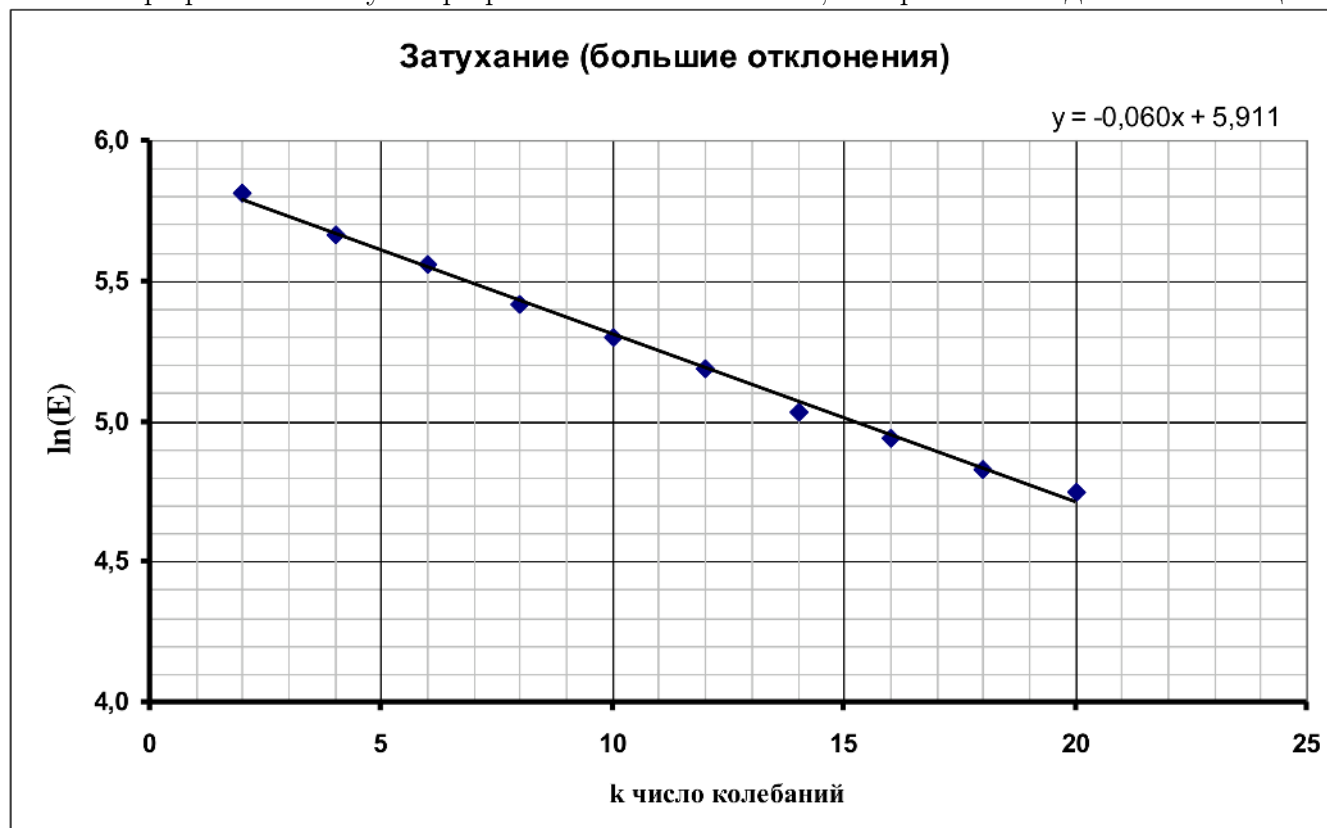
Логарифмируя эту зависимость, получим

$$\ln E_k = \ln E_0 + k \ln(1 - \varepsilon) \quad (7)$$

Таким образом, зависимость логарифма энергии от числа колебаний – линейна, причем коэффициент наклона этой зависимости равен

$$a = \frac{\Delta \ln E_k}{\Delta k} = -\ln(1 - \varepsilon) \approx \varepsilon. \quad (8)$$

Здесь учтено, что относительные потери малы $\varepsilon \ll 1$, что оправдывает сделанное приближение. Впрочем, можно провести и точный расчет (что является излишним). На рисунке показан график этой полулогарифмической зависимости, построенной по данным таблицы 1.



Из полученного графика следует, что предположение о примерном постоянстве ε подтверждается, численное значение $\varepsilon \approx 0,06 = 6\%$.

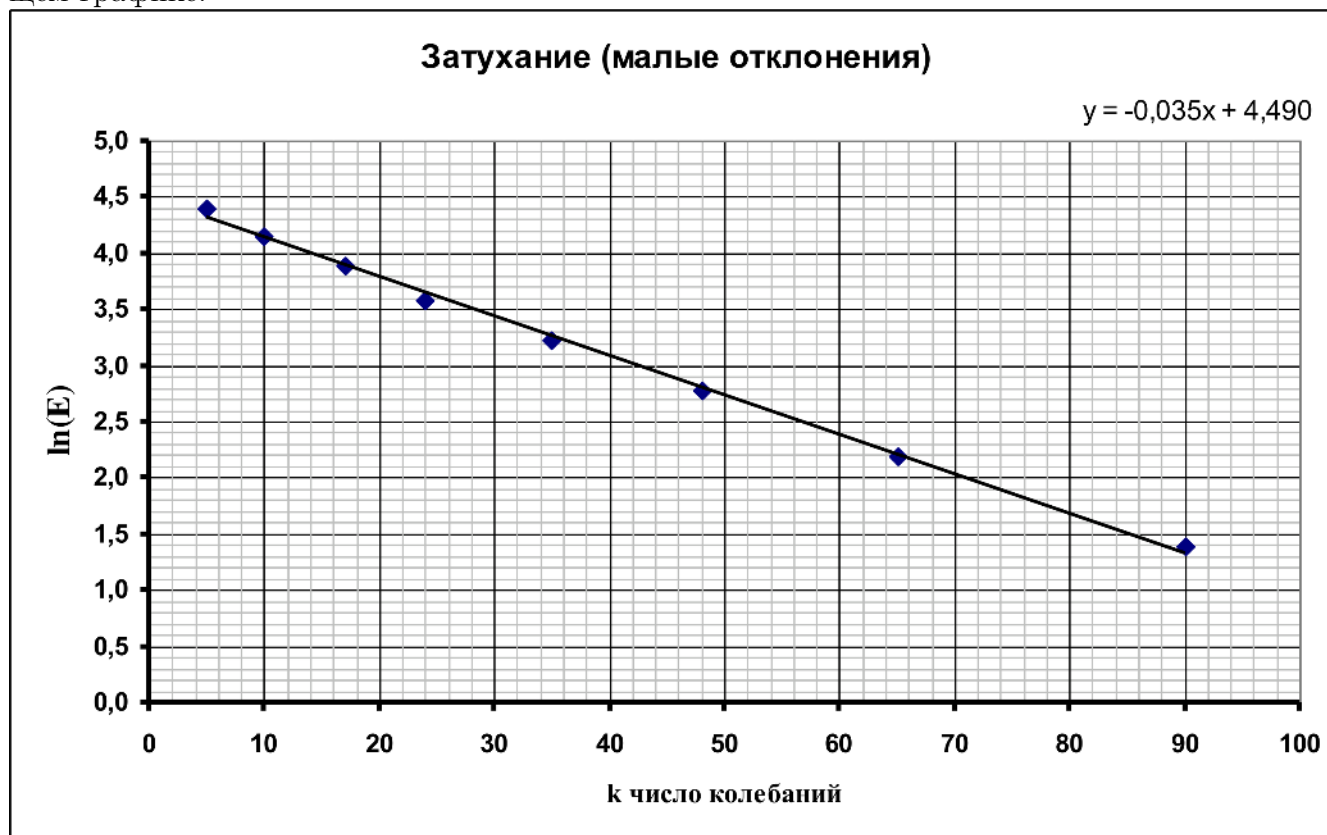
При малых отклонениях удобнее видоизменить методику проведения измерений. В этом случае удобнее подсчитывать число колебаний до того, как амплитуда уменьшится до фиксированного значения (задаем x - считаем k). Эти измерения можно провести, за один процесс затухания, так как хватает времени, чтобы записать промежуточные результаты.

В таблице 2 приведены результаты таких измерений. Число колебаний получено в результате усреднения по трем измерениям. Начальное отклонение – 10 см.

Таблица 2. Малые отклонения.

x_k , см	k	E	Ln E
10	0		
9	5	81,00	4,39
8	10	64,00	4,16
7	17	49,00	3,89
6	24	36,00	3,58
5	35	25,00	3,22
4	48	16,00	2,77
3	65	9,00	2,20
2	90	4,00	1,39

Обработка результатов измерений проведена аналогично. Результат представлен на следующем графике.



В этом случае относительные потери также можно считать постоянными, величина этих потерь меньше, примерно $\varepsilon \approx 3,5\%$

2.5 Этот пункт является несколько провокационным. Оказывается, что результаты крайне незначительно отличаются от результатов, полученных в предыдущем пункте.

2.6 Таким образом, потери на «неупругость удара» значительно меньше потерь в следствие сопротивления воздуха.

Часть 3. Закрутка

В таблице 3 приведены результаты измерения зависимости начального угла отклонения φ_0 , необходимого для накручивания нити, от положения стержня l . Приведены средние значения углов, полученных в результате нескольких (5-7) измерений

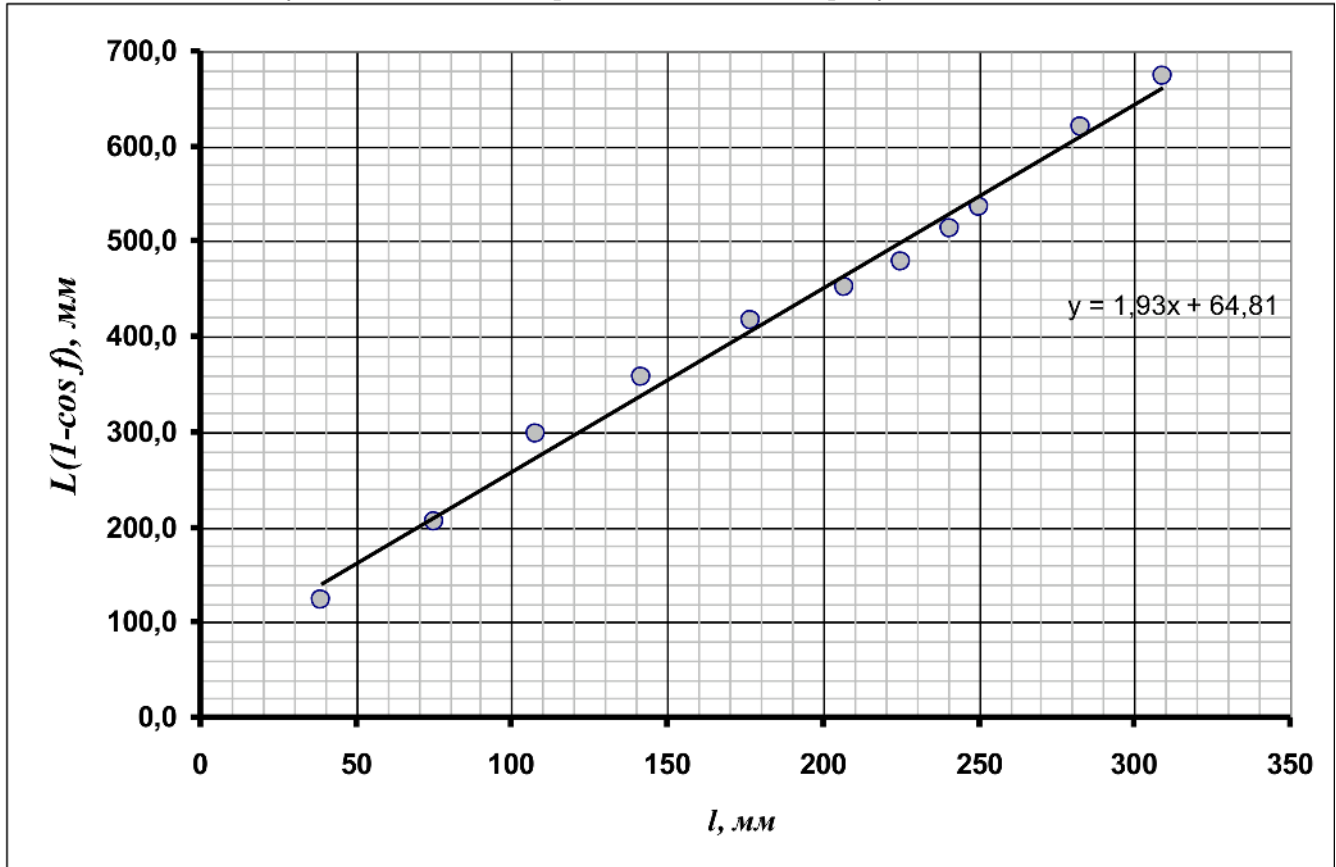
Таблица 3.

l , мм	φ_0 , °	$L(1 - \cos \varphi_0)$
39	35,0	123,9
75	45,5	204,9
108	55,5	297,0
142	61,5	358,1
177	67,0	417,3
207	70,0	450,7
225	72,5	479,0
241	75,5	513,5
250	77,5	536,7
283	84,5	619,3
309	89,0	673,0

Для проверки теоретической зависимости (4) удобно представить ее в виде¹

$$L(1 - \cos \varphi_0) = \frac{5}{2}l \quad (9)$$

Так как не сложно построить зависимость величины $Z = L(1 - \cos \varphi_0)$ от l , которая должна быть линейной. Результат такого построения показан на рисунке.



¹ Возможны и другие равноценные представления.

Зависимость линейна, что соответствует теоретической формуле. Однако, теоретическое значение коэффициента наклона равно 2,5, а экспериментально полученное значение

$$a = 1,93 \pm 0,12. \quad (10)$$

Т.е. близко к 2. Это отличие не может быть объяснено погрешностью измерений. Потери энергии также не могут объяснить данное отклонение (во-первых, они малы; во-вторых, должны приводить к отклонению в другую сторону).

По-видимому, главная причина отличия заключается в том, что стержень, на который наматывается нить, имеет заметный радиус (не учтенный в теоретическом выводе). При накручивании нити гайка движется не по окружности, а по спирали. В этом случае если нить поднимается к верхней точке с небольшой скоростью, то она начнет наматываться на стержень. Даже в том случае, если вблизи верхней точки нить частично провисла (что очень сложно заметить), то при дальнейшем движении она может намотаться на стержень — так как радиус траектории уменьшается.

