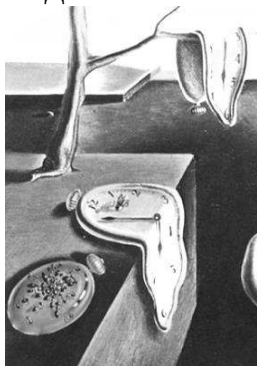


Условие

Задача 9-2 Часы.



В данной задаче вам предстоит дать кинематическое описание движения стрелок часов и рассмотреть несколько эффектов, связанных с их движением. Будем рассматривать традиционные механические часы, в которых полный оборот разделен на 12 равных частей – часов.

Часть 1. Угломерные шкалы.

Стрелки часов бегают по кругу! Для описания их движения необходимо ввести единицы измерения углов. Вам знакома градусная шкала: один полный оборот равен 360° . Но углы можно измерять в единицах времени! Действительно, циферблат часов проградуирован в часах. Поэтому имеет смысл ввести единицу измерения угла – **1 угловой час** (эту единицу обозначим $^\circ\text{час}$). За 1 временной час часовая стрелка поворачивается на 1 угловой час, поэтому угловая скорость движения часовой стрелки равна $\omega_h = 1 \frac{^\circ\text{час}}{\text{час}}$. Аналогично введем единицу измерения – угловая минута¹ ($^\circ\text{мин}$) – угол, на который поворачивается минутная стрелка за 1 временную минуту.

1.1 Чему равны угловой час $^\circ\text{час}$ и угловая минута $^\circ\text{мин}$ в обычных угловых градусах?

1.2 Выразите угловую минуту $^\circ\text{мин}$ через угловой час $^\circ\text{час}$.

1.3 Чему равна угловая скорость минутной стрелки ω_m в единицах $\frac{^\circ\text{час}}{\text{час}}$?

1.4 Чему равна скорость часовой стрелки ω_h в единицах $\frac{^\circ\text{мин}}{\text{мин}}$?

Часть 2. Исправные часы.

Углы поворота стрелок обозначим: часовой – φ_h , минутной – φ_m . Отметим, что эти углы определяются по циферблату часов, т.е. после полного оборота значения углов «обнуляются». Текущее время будем обозначать традиционно – t . В данной части задачи углы следует измерять в часах $^\circ\text{час}$. При записи законов движения, оцифровке осей используйте точные численные значения угловых скоростей стрелок.

2.1 Запишите законы движения часовой и минутной стрелок – зависимости их углов поворота от времени $\varphi_h(t)$ и $\varphi_m(t)$.

2.2 Постройте графики законов движения $\varphi_h(t)$ и $\varphi_m(t)$ за один оборот часовой стрелки.

2.3 Рассчитайте моменты времени (выразите их в часах и минутах; с точностью до минуты), когда минутная и часовая стрелки совпадают.

Часть 3. Испорченные маятниковые часы.

За один период колебаний стрелки поворачиваются строго на один и тот же угол. В результате измерения температуры длина маятника увеличилась, в результате чего период его колебаний увеличился на $\eta = 1,00\%$.

¹ Не путать с традиционной угловой минутой равной одной шестидесятой углового градуса $1' = \frac{1^\circ}{60}$.

3.1 Эти часы будут отставать или спешить? Ответ обоснуйте.

3.2 Какова будет ошибка показаний часов за сутки (в секундах). Определим ошибку как $\delta t = t - \hat{t}$, где t - истинное время, $\hat{t}$ - показания часов.

3.3 Пусть в момент времени $t = 0$ часы показывают точное время. Через какой промежуток времени они опять покажут точное время?

Решение

Задача 9-2 Часы.

Часть 1. Угломерные шкалы.

1.1 Угол одного оборота равен 360° , а также 12° час и 60° мин. Поэтому

$$1^\circ \text{ час} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ \quad (1)$$

$$1^\circ \text{ мин} = \frac{360^\circ}{60} = 6^\circ \quad (2)$$

1.2 Приравнивая угол одного оборота в обеих единицах, получим

$$60^\circ \text{ мин} = 12^\circ \text{ час} \Rightarrow 1^\circ \text{ мин} = \frac{12^\circ}{60} \text{ час} = \frac{1^\circ}{5} \text{ час} \quad (3)$$

1.3 За 1 час минутная стрелка поворачивается на полный оборот, т.е. на 12° час, поэтому

$$\omega_m = 12 \frac{^\circ \text{ час}}{\text{час}} \quad (4)$$

1.4 За 1 час (60 минут) часовая стрелка поворачивается на 1° час или, как следует из соотношения (3) на 5° мин, поэтому

$$\omega_h = \frac{5^\circ \text{ мин}}{60 \text{ мин}} = \frac{1^\circ \text{ мин}}{12 \text{ мин}} \quad (5)$$

Часть 2. Исправные часы.

2.1 Так как стрелки движутся равномерно, то углы их поворота (без «обнуления») описываются традиционными формулами, описывающими равномерное движение:

$$\tilde{\varphi}_h = \omega_h t$$

$$\tilde{\varphi}_m = \omega_m t \quad (6)$$

Чтобы исключить полные обороты (провести «обнуление») удобно использовать функцию $y = \{x\}$ - дробная часть числа. С помощью этой функции можно провести «обнуление» любого угла (измеренного в $^\circ$ час):

$$\varphi = 12 \left\{ \frac{\varphi}{12} \right\}. \quad (7)$$

Тогда, с учетом численных значений угловых скоростей стрелок, можно записать

$$\varphi_h = 12 \left\{ \frac{t}{12} \right\}$$

$$\varphi_m = 12 \{t\} \quad (8)$$

2.2 Графики законов движения $\varphi_h(t)$ и $\varphi_m(t)$ за один оборот часовой стрелки (т.е. за 12 часов) показаны на рисунке



2.3 В заданном диапазоне времени, закон движения часовой стрелки записывается просто

$$\varphi_h = t \quad (8)$$

Для описания движения минутной стрелки удобней записать ее закон движения в течение каждого часа (начиная от часа n), который изображается наклонной прямой

$$\varphi_m = 12(t - n) \quad t \in [n, n + 1] \quad (9)$$

Для определения моментов времени, когда стрелки часов совпадают, необходимо решить уравнение

$$\varphi_m = \varphi_h \Rightarrow 12(t - n) = t \Rightarrow t_n = \frac{12}{11}n \quad (10)$$

Эти времена можно представить в виде $t_n = \frac{12}{11}n = n + \frac{n}{11}$. В этой записи: n - время встречи (часы), а величину $\frac{n}{11}$ следует перевести в минуты. Эта добавка времени в минутах будет равна $\Delta t = \frac{n}{11} \cdot 60$. Расчеты времен приведены в таблице.

п	Время встречи		п	Время встречи	
	часы	минуты		часы	минуты
0	0	0	6	6	33
1	1	5	7	7	38
2	2	11	8	8	44
3	3	16	9	9	49
4	4	22	10	10	55
5	5	27	11	12	0

Часть 3. Испорченные маятниковые часы.

3.1 Часы будут отставать, так как на некоторый угол (определяющий показания часов) они повернутся за большее время.

3.2 Показания часов пропорциональны числу периодов колебаний. Пусть период колебаний исправных часов равен T_0 , тогда за время t показания часов будут

$$\hat{t}_0 = A \frac{t}{T_0} = t, \quad (11)$$

где A - некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий от устройства часов. Для исправных часов показания часов равны истинному времени. За тот же промежуток истинного времени испорченные часы покажут

$$\hat{t} = A \frac{t}{T} = A \frac{t}{T_0(1+\eta)} = \frac{t}{1+\eta} \quad (12)$$

Тогда ошибка в показаниях часов будет равна

$$\delta t = t - \hat{t} = t - \frac{t}{1+\eta} = \frac{\eta}{1+\eta} t \quad (13)$$

Подставим численные значения и вычислим

$$\delta t = \frac{\eta}{1+\eta} t = \frac{0,0100}{1+0,0100} 24 \cdot 3600 = 855c \approx 14\text{мин.} \quad (14)$$

3.3 Часы покажут точное время, когда набегит ошибка в 12 часов. Из формулы (13) находим

$$\delta t = \frac{\eta}{1+\eta} t \Rightarrow t = \frac{1+\eta}{\eta} \delta t = \frac{1,0100}{0,0100} 12 = 1212\text{час} \approx 50\text{дней.} \quad (15)$$