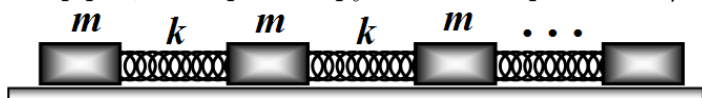


Бруски и пружинки

Условие

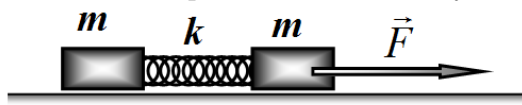
Задача 10-1. «Бруски и пружинки»

В данной задаче рассматривается растяжение цепочки, состоящей из одинаковых брусков и одинаковых пружин, лежащих на горизонтальной поверхности вдоль одной прямой. Массы всех брусков равны m , жесткости пружин - k , массы пружин пренебрежимо малы, коэффициент трения брусков о поверхность - μ .



Часть 1. Два бруска.

1.1 Цепочка состоит из двух брусков. В начальный момент времени бруски покоятся, пружина не деформирована. Какую минимальную постоянно действующую горизонтальную силу $\vec{F}$ необходимо приложить к одному из брусков, чтобы сдвинуть с места второй.



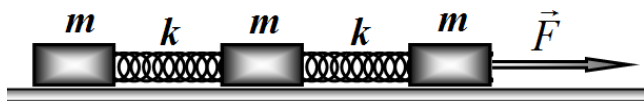
Внимание! Далее (во всех частях задачи) будем рассматривать «квазистационарное» приближение:

приложенная сила изменяется очень медленно, так, что в любой момент времени ускорением брусков можно пренебречь, следовательно, в любой момент времени сумма сил, действующих на каждый брусок равна нулю. Пока не сдвинется последний брусок!

1.2 В системе, описанной в п.1.1, прилагаемая сила медленно возрастает от нуля. При каком значении этой силы сдвинется второй брусок? Чему будет равна деформация пружины в этот момент времени?

Часть 2. Три бруска.

На горизонтальной поверхности расположена цепочка из трех брусков. Бруски покоятся, пружины не деформированы. К крайнему бруску начинают прикладывать горизонтально силу $\vec{F}$, которая медленно возрастает.



В численных расчетах примите, что $\mu mg = f_0 = 1,0$ Н, $\frac{\mu mg}{k} = l_0 = 1,0$ см.

2.1 При какой минимальной силе $F_{\min}$ сдвинутся все бруски?

2.2 Постройте график зависимости суммарного удлинения цепочки x от модуля приложенной силы F при ее изменении от нуля до найденного значения $F_{\min}$. Получите формулы, описывающие каждый характерный этап движения, найдите значения в «узловых» точках.

2.3 Покажите, что энергетический баланс «сходится». Рассчитайте энергию, поступившую в цепочку, укажите и рассчитайте количественно, на что израсходована эта энергия. 2.4 Найдите установившееся (после прекращения колебаний брусков) удлинение цепочки, если приложенная сила достигла значения $2F_{\min}$ и перестала изменяться.

Часть 3. Цепочка из N брусков.**

На горизонтальной поверхности из N брусков. В начальный момент времени все бруски покоятся, пружины не деформированы. К крайнему бруску начинают прикладывать горизонтально силу $\vec{F}$, которая медленно возрастает.

3.1 Найдите общую деформацию цепочки к моменту времени, когда сдвинется последний брусок.

3.2 Найдите установившееся (после прекращения колебаний брусков) удлинение цепочки, если приложенная сила достигла значения $2N\mu tg$ и перестала изменяться.

Решение

Задача 10-1. «Бруски и пружинки»

Часть 1. Два бруска.

1.1 Чтобы сдвинуть с места второй брусок, к нему необходимо приложить силу равную максимальной силе трения покоя, т.е.

$$F_2 = \mu tg. \quad (1)$$

Такой силой может быть только силы упругости пружинки. Следовательно, ее необходимо растянуть на величину

$$x = \frac{F_2}{k} = \frac{\mu tg}{k}. \quad (2)$$

Очевидно, что на такую же величину необходимо сместить первый брусок. Если к бруску приложить постоянную силу (превышающую силу трения), то он начнет двигаться ускоренно, по мере растяжения пружинки ускорение будет уменьшаться. После того, как сила упругости в сумме с силой трения превысит приложенную силу, брусок будет продолжать двигаться в том же направлении (по инерции) с уменьшающейся скоростью. Когда скорость бруска станет равной нулю, смещение бруска будет максимально. Именно в это момент смещение бруска должно стать равным величине, определяемой формулой (2). Для движения первого бруска запишем уравнение закона сохранения и превращения энергии: работа постоянной силы пойдет на увеличение потенциальной энергии пружины и работу против силы трения:

$$Fx = \frac{kx^2}{2} + \mu tgx. \quad (3)$$

Из этого уравнения находим (с учетом формулы (2)):

$$F = \frac{kx}{2} + \mu tg = \frac{3}{2}\mu tg. \quad (4)$$

Отметим, что эта сила меньше, чем суммарная сила трения, действующая на два бруска.

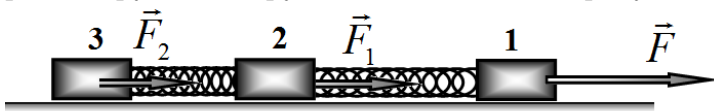
1.2 Все предыдущие рассуждения, касающиеся второго бруска, остаются в силе. Теперь учтем, что в используемом приближении сумма сил, действующих на первый брусок, также должна равняться нулю. Следовательно, к нему должна быть приложена сила, равная сумме сил упругости и силы трения, т. е.

$$F = 2\mu tg. \quad (5)$$

Деформация пружины в этом случае также определяется формулой (2).

Часть 2. Три бруска.

Обозначим модули сил упругости пружинок F_1 и F_2 . А деформации пружинок x_1, x_2 Нумерация брусков и пружинок показана на рисунке.



2.1 Последний брусок сдвинется, если на него подействует сила упругости $F_2 = \mu mg = f_0$. Сила упругости первой пружинки в этот момент будет равна сумме сил упругости второй пружинки и силы трения, т.е. $F_1 = F_2 + \mu mg = 2f_0$. Приложенная сила в этот момент времени должна превысить F_2 также на величину силы трения, т.е. минимальная сила, необходимая для того, чтобы сдвинуть все бруски, равна

$$F_{\min} = F_1 + \mu mg = 3f_0. \quad (6)$$

Этот же результат можно получить и другим, более простым способом. Рассмотрим цепочку целиком. Силы упругости являются внутренними силами для всей цепочки, поэтому они не влияют на ускорение центра масс (которое равно нулю). Поэтому сумма внешних сил также должна быть равна нулю. Поэтому прикладываемая сила должна быть равна суммарной силе трения, действующей на цепочку, т.е. $F_{\min} = 3\mu mg = 3f_0$.

2.2 Рассмотрим движение по этапам. Для удобства все выкладки отразим в таблице. Величину силы выразим как $F = z f_0$, где z - безразмерный параметр.

Сила F	Сила F_1	Деформация x_1	Сила F_2	Деформация x_2	Суммарная деформация $x = x_1 + x_2$
1 этап: все бруски покоятся $F \in [0, f_0]$	$F_1 = 0$	$x_1 = 0$	$F_2 = 0$	$x_2 = 0$	$x = 0$
2 этап: сдвинулся первый брусок, второй и третий покоятся $F \in [f_0, 2f_0]$	$F_1 = F - f_0 = (z - 1)f_0$	$x_1 = (z - 1)l_0$	$F_2 = 0$	$x_2 = 0$	$x = (z - 1)l_0$
3 этап: сдвинулся второй брусок, третий покоится $F \in [2f_0, 3f_0]$	$F_1 = (z - 1)f_0$	$x_1 = (z - 1)l_0$	$F_2 = F - f_0 = (z - 2)f_0$	$x_2 = (z - 2)l_0$	$x = (2z - 3)l_0$

Таким образом, искомая зависимость представляет собой ломаную линию, состоящую из прямолинейных отрезков. Значения координат в «узловых» точках (когда начинается движение очередного бруска) показаны в следующей таблице и на графике.

$z = \frac{F}{f_0}$	$\lambda = \frac{x}{l_0}$
0	0
1	0
2	1
3	3

$z = \frac{F}{f_0}$	$\lambda = \frac{x}{l_0}$
0	0
1	0
2	1
3	3

2.3 В рассматриваемую систему (цепочку) энергия поступает благодаря работе внешней силы F . Работу этой силы легко подсчитать с помощью построенного графика. Численно работа равна площади между осью x (на графике вертикальна) и графиком зависимости $F(l)$. Простой расчет дает следующее значение для работы силы:

$$A = f_0 l_0 \left(\frac{1+2}{2} \cdot 1 + \frac{2+3}{2} \cdot 2 \right) = \frac{13}{2} f_0 l_0. \quad (7)$$

Часть этой энергии пошла на увеличение потенциальной энергии пружин. Деформация первой пружины равна $2l_0$, второй - l_0 . Поэтому энергия деформированных пружин равна

$$U = \frac{k}{2}(2l_0)^2 + \frac{k}{2}(l_0)^2 = \frac{5}{2} f_0 l_0.$$

Часть энергии была израсходована на работу против сил трения (т.е. перешла во внутреннюю, тепловую энергию). Первый брусок сместился на расстояние $3l_0$, второй на расстояние l_0 ,

поэтому количество выделившейся из-за трения теплоты равно

$$Q = 3f_0l_0 + f_0l_0 = 4f_0l_0.$$

Таким образом, уравнение энергетического баланса

$$A = U + Q$$

выполняется.

2.4 Так как внешняя сила заставила все бруски двигаться, то после прекращения колебаний все бруски будут двигаться с одинаковым ускорением равным

$$a = \frac{F - 3\mu mg}{3m} = \frac{2 \cdot 3\mu mg - 3\mu mg}{3m} = \mu g.$$

Для последнего бруска уравнение второго закона Ньютона имеет вид

$$ma = F_2 - \mu mg.$$

Откуда следует, что $F_2 = \mu mg + ma = 2\mu mg$, а удлинение второй пружины

$$x_2 = \frac{F_2}{k} = \frac{2\mu mg}{k} = 2l_0.$$

Из второго закона Ньютона для центрального бруска

$$ma = F_1 - \mu mg$$

Следует, что сила упругости первой пружины на $2f_0$ больше силы упругости второй, а ее удлинение на $2l_0$ больше второй, т.е. $x_2 = 4l_0$. В итоге получаем, что суммарное удлинение цепочки в этом случае равно

$$x = x_1 + x_2 = 6l_0.$$

****Часть 3. Цепочка из N брусков.****

3.1 Подробное рассмотрение предыдущих частей задачи показывает, что сила упругости последней пружинки равна $f_0 = \mu mg$, а сила упругости каждой следующей возрастает на величину $f_0 = \mu mg$. Соответственно, деформация крайней равна $l_0 = \frac{\mu mg}{k}$, каждой следующей возрастает на величину $l_0 = \frac{\mu mg}{k}$. Следовательно, общая деформация цепочки вычисляется как сумма

$$x = l_0 + 2l_0 + 3l_0 + \dots + (N-1)l_0 = \frac{N(N-1)}{2}l_0.$$

3.2 Из 2 закона Ньютона (см. п. 2.3) следует, что в данном случае деформация каждой цепочки возрастает на величину $2l_0$. Поэтому и общее удлинение будет в 2 раза больше, чем в предыдущем пункте

$$x = 2l_0 + 4l_0 + 6l_0 + \dots + 2(N-1)l_0 = N(N-1)l_0.$$

Зависимость деформации от приложенной силы

