

Условие

Задача 10-3. «Неоднородное гравитационное поле»

Сила гравитационного взаимодействия зависит от расстояния между взаимодействующими телами. Поэтому гравитационные поля, в общем случае, являются неоднородными. Даже небольшие неоднородности этого поля могут приводить ко многим интересным и неожиданным эффектам, некоторые из которых рассматриваются в данной задаче.

Ускорение свободного падения на поверхности Земли обозначим $g_0 = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Землю будем считать однородным шаром радиуса $R = 6,4 \cdot 10^6$ м. Вращением Земли вокруг собственной оси следует пренебрегать. Все ответы выражайте через эти заданные параметры, гравитационная постоянная и масса Земли в эти ответы входить не должны. Во всех пунктах задачи деформации тел следует считать пренебрежимо малыми.

Используйте приближенную формулу, справедливую при $\xi \ll 1$ и любых степенях γ :

$$(1 + \xi)^\gamma \approx 1 + \gamma\xi \quad (1)$$

Часть 1. Ускорение свободного падения.

1.1 Получите формулу для ускорения свободного падения g_r на расстоянии r от центра Земли ($r > R$). Выразите его через ускорение свободного падения на поверхности Земли g_0 .

При малом радиальном отклонении от расстояния r на малую величину x можно считать, что ускорение свободного падения зависит линейно от малого смещения. Т.е. ускорение свободного падения на расстоянии $r + x$ от центра Земли g_{r+x} можно приближенно представить в виде

$$g_{r+x} \approx g_r(1 + \alpha x). \quad (2)$$

1.2 Определите значение множителя α в формуле (2).

1.3 Рассчитайте, на какой высоте h над поверхностью Земли ускорение свободного падения уменьшается на 1,0% по сравнению с ускорением на поверхности Земли.

Часть 2. Свободное падение.

В данной части рассматривается движения тела, состоящего из двух массивных шаров (масса каждого $m = 10$ кг, радиус $b \approx 10$ см, каждый из них можно рассматривать как материальную точку), соединенных легким (с пренебрежимо малой массой) стержнем длины $l = 10$ м.

Стержень свободно падает в поле тяжести Земли, оставаясь в вертикальном положении. Сопротивлением воздуха следует пренебрегать. В некоторый момент времени середина стержня находится на расстоянии r от центра Земли.

2.1 Получите формулу для силы натяжения стержня F в процессе его падения, возникающую вследствие неоднородности гравитационного поля Земли. В этом пункте гравитационным взаимодействием шаров следует пренебрегать.

2.2 Укажите, будет стержень растянут или сжат. Рассчитайте численное значение силы натяжения стержня F , если центр стержня находится на высоте $h = 10$ км над поверхностью Земли.

2.3 Найдите отношение найденной силы F к силе гравитационного взаимодействия между шариками F_G . В расчетах можно принять, что плотность материала шариков равна средней плотности Земли. Оцените численное значение этого отношения $\frac{F}{F_G}$.

Часть 3. Орбитальная станция.

Орбитальная станция состоит из двух одинаковых сферических отсеков, соединенных между собой длинным стержнем. Масса каждого отсека равна m , длина стержня l . Отсеки можно считать материальными точками, масса стержня пренебрежимо мала. Станция вращается вокруг Земли по круговой траектории, так, что середина стержня находится на расстоянии r от центра Земли (очевидно, что $r \gg l$). Станция движется так, что ее ось все время направлена к центру Земли.

3.1 Найдите силу упругости F стержня, соединяющего отсеки станции. Укажите, сжат или растянут этот стержень.

14

¹ Это же различие легко объяснить, если перейти во вращающуюся неинерциальную систему отсчета, связанной с самой станцией. В этой системе отсчета, на отсеки действуют различные центробежные силы, помимо сил гравитационных.