

Формула Торричелли

Условие

Задача 9-3. «Формула Торричелли»



В учебнике физики для 7 класса в параграфе, посвященном давлению, приведен рисунок, на котором показаны струи воды, вытекающие из отверстий в боковой стенке бутылки.

На отдельном бланке к данной задаче воспроизведен этот рисунок, к которому добавлена масштабная сетка. Разметка шкал проведена в сантиметрах.

В данной задаче вам необходимо проверить, правильно ли нарисован этот рисунок, а также рассмотреть некоторые вопросы, связанные с вытеканием жидкости из отверстия.

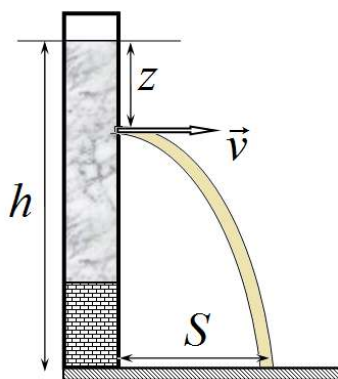
Еще в 1641 году итальянский ученый Эванжелиста Торричелли получил формулу для скорости жидкости, вытекающей из небольшого отверстия

$$v = \sqrt{2gh}, \quad (1)$$

где h - расстояние от отверстия до уровня жидкости (глубина на которой находится отверстие), g - ускорение свободного падения. Считайте, что вектор скорости струи на выходе из отверстия направлен горизонтально.

При численных расчетах считайте, что $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Во всех задачах сопротивлением воздуха следует пренебречь.

Часть 1. Дальность полета струи.



Пусть бутылка стоит на подставке, расположенной на горизонтальном столе. Обозначим: h - высоту уровня воды в бутылке над уровнем стола; z - глубину, которой находится отверстие в боковой стенке; S - расстояние, на котором струя падает на стол.

1.1 Получите формулу для дальности полета струи S в зависимости от глубины, на котором находится отверстие z . Высоту уровня воды h считайте известной и постоянной.

1.2 Найдите, при какой глубине z дальность полета струи S будет максимальна. Чему равна эта максимальная дальность S_{max} ?

1.3 Используя рисунок из учебника (расположенный на отдельном бланке) рассчитайте каковы должны быть равны дальности всех струй. Результаты расчетов представьте в таблице 1.

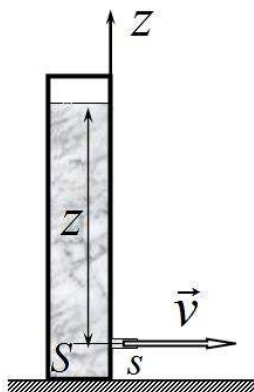
Таблица 1.

Номер струи k	Высота h_k (см)	Положение отверстия z_k (см)	Дальность струи S_k , (см)
1			
2			
3			

1.4 Получите уравнение траектории струи $y(x)$, где x , y - горизонтальная и вертикальная координаты точек струи. На свободном бланке правильно нарисуйте все струи.

Часть 2. Время вытекания.

В этой части задачи необходимо математически описать процесс вытекания воды из цилиндрического сосуда через малое отверстие в боковой стенке. Отношение площади отверстия s к площади поперечного сечения сосуда S обозначим $\eta = \frac{s}{S}$. Введем вертикальную ось z , направленную вверх, начало отсчета совместим с отверстием. Высота уровня воды в начальный момент времени равна h . Основной целью является расчет зависимости координаты верхнего уровня воды в сосуде от времени $z(t)$.

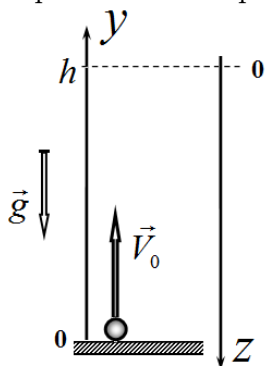


2.1 Качественное описание.

2.1.1 Укажите на рисунке направление векторов скорости $\vec{V}$ и ускорения $\vec{a}$ движения верхнего уровня воды. 2.1.2 Найдите зависимость проекции вектора скорости $\vec{V}$ на ось z от координаты $V_z(z)$. 2.1.3 Нарисуйте схематический график зависимости координаты уровня воды от времени $z(t)$.

2.2 Вспомогательная задача.

Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью V_0 . Введем ось y , направленную вертикально вверх, начало отсчета совместим с точкой бросания.



2.2.1 Запишите зависимость проекции скорости тела $V_y(t)$ на ось y и координаты брошенно-

го тела $y(t)$ от времени. Постройте схематический график зависимости $y(t)$. 2.2.2 Найдите максимальную высоту подъема тела $h = z_{\max}$.

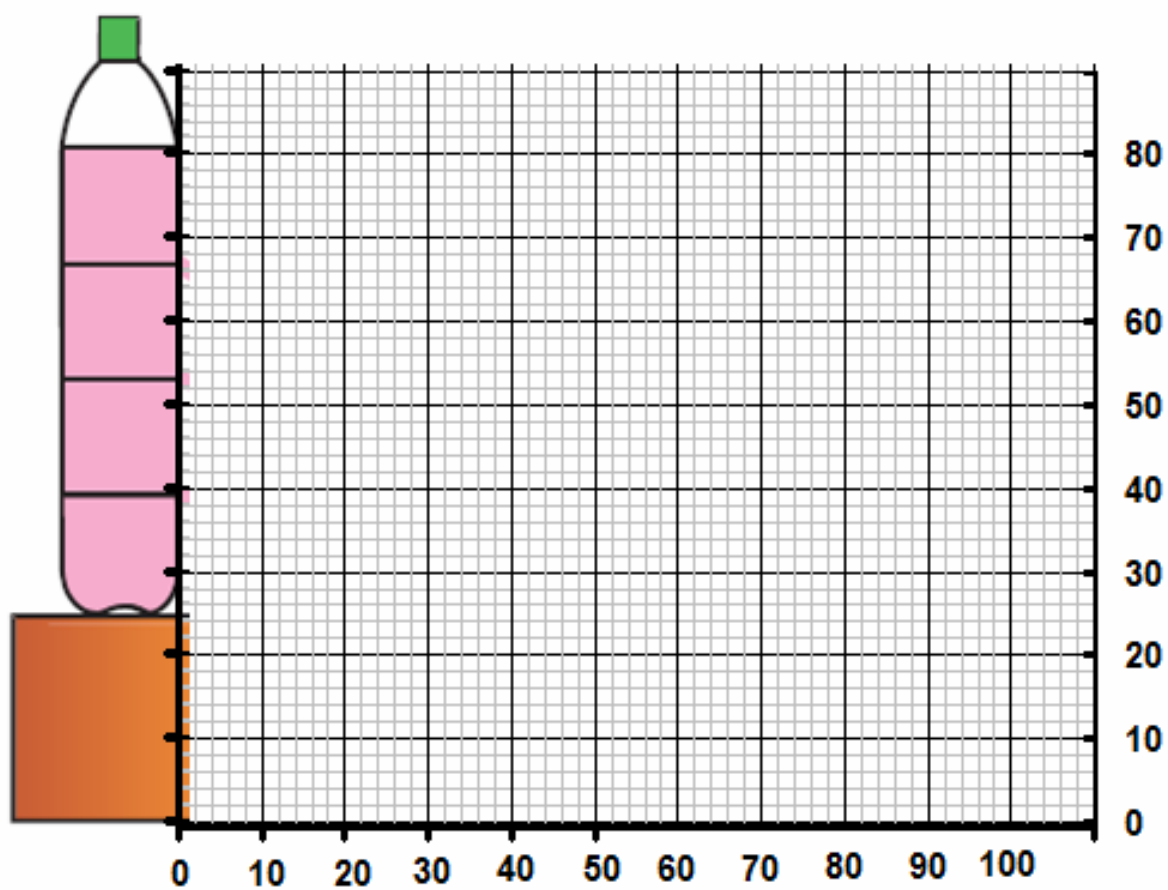
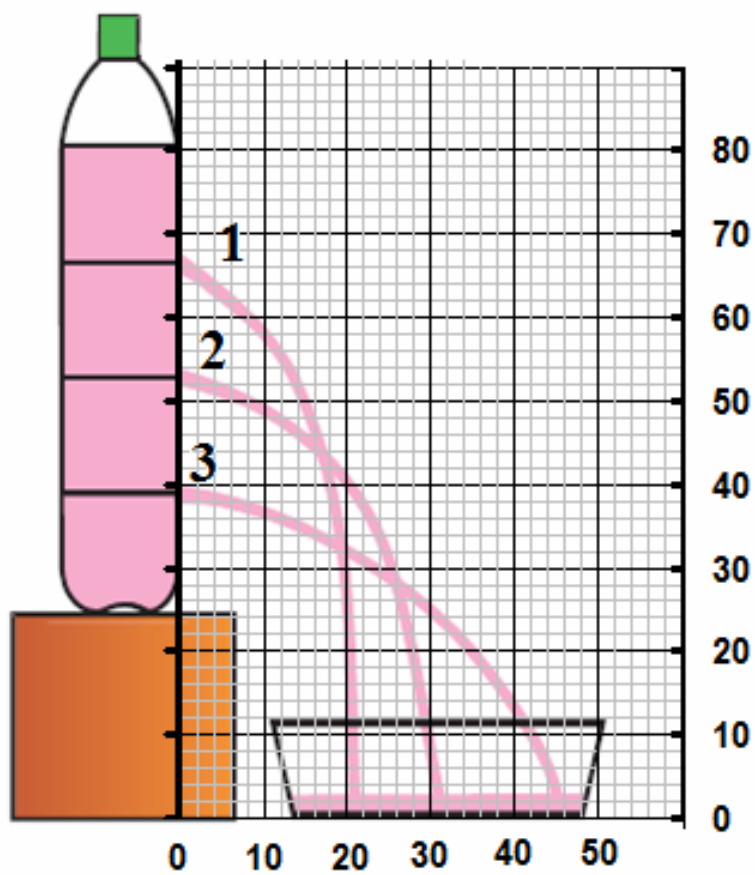
Теперь введем ось z , направленную вертикально вниз, начало отсчета, которой находится на высоте максимального подъема h .

2.2.3 Запишите зависимости проекции скорости тела $V_z(t)$ на ось z и координаты тела $z(t)$ от времени. 2.2.4 Найдите зависимость проекции скорости тела на ось z от его координаты $V_z(z)$

2.3 Возвращение к вытеканию воды.

2.3.1 Запишите зависимость координаты уровня воды в цилиндрическом сосуде (см. п. 2.1) от времени $z(t)$. 2.3.2 Найдите время вытекания воды из сосуда τ . 2.3.3 Рассчитайте численное значение времени вытекания τ воды, если радиус круглого отверстия равен $r = 1,0$ мм, а радиус сосуда $R = 5,0$ см, начальная высота уровня воды равна $h = 20$ см.

Бланк к задаче 9-3



Решение

****<u>Задача 9-3. «Формула Торричелли»**

Часть 1. Дальность полета струи.</u>**

1.1 В соответствии с формулой Торричелли скорость струи на выходе из отверстия равна

$$v = \sqrt{2gz} . \quad (1)$$

Так как сопротивление воздуха пренебрежимо мало, то горизонтальная составляющая скорости струи будет сохраняться. Поэтому дальность полета струи можно вычислить, как произведение горизонтальной скорости на время падения

$$S = v\tau . \quad (2)$$

Вертикальное движение струи является равноускоренным с ускорением свободного падения, поэтому справедливо соотношение

$$h - z = \frac{g\tau^2}{2} . \quad (3)$$

Из которого легко найти время падения

$$\tau = \sqrt{2\frac{h-z}{g}} . \quad (4)$$

Подставляя формулы для скорости и времени падения в формулу (2), получим формулу для дальности полета струи:

$$S = v\tau = \sqrt{2gz} \sqrt{2\frac{h-z}{g}} = 2\sqrt{z(h-z)} . \quad (5)$$

1.2 В формуле (5) под корнем стоит квадратичная функция от z , которая обращается в нуль при $z = 0$ и $z = h$. Так как парабола – симметричная кривая, то ее максимум находится по середине между нулями, т.е. при $z' = \frac{h}{2}$. Тогда максимальная дальность струи равна

$$S_{\max} = 2\sqrt{\frac{h}{2} \left(h - \frac{h}{2} \right)} = h . \quad (6)$$

1.3 По рисунку следует определить глубины, на которых находятся отверстия z_k , высоту Уровня воды h . Затем дальности струй рассчитываются по формуле (6). Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Номер струи k	Высота h_k (см)	Глубина отверстия z_k (см)	Дальность струи S_k , (см)
1	80	14	61
2	80	26	75
3	80	41	80

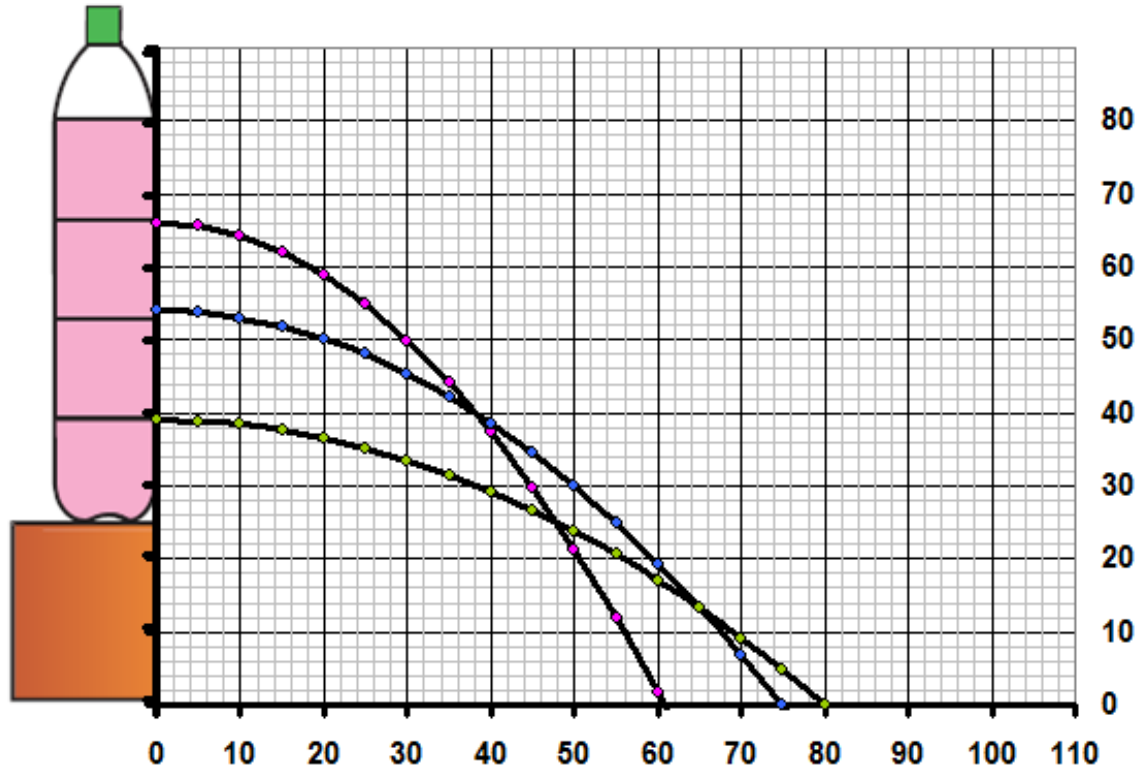
1.4 Зависимости координат точек струи от времени описываются функциями

$$\begin{cases} x = vt \\ y = (h - z) - \frac{gt^2}{2} \end{cases} . \quad (7)$$

Из первого уравнения выразим $t = \frac{x}{v}$ и подставим во второе, в результате получим уравнение траектории

$$y = (h - z) - \frac{g}{2v^2}x^2 = (h - z) - \frac{x^2}{4z}, \quad (8)$$

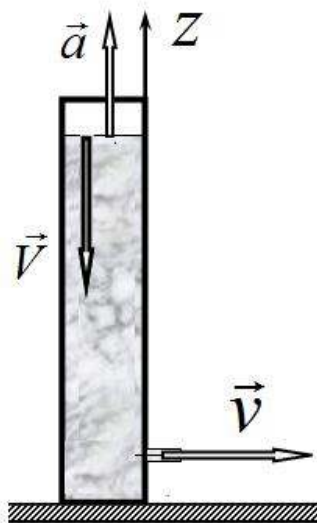
где использована формула Торричелли для начальной скорости струи. Рисунок струй, рассчитанных по формуле (8), показан на рисунке.



Часть 2. Время вытекания.

2.1 Качественное описание.

2.1.1 Очевидно, что вектор скорости $\vec{V}$ движения уровня воды направлен вниз. При понижении уровня воды скорость вытекания, а, следовательно, и модуль скорости движения уровня воды уменьшаются. Поэтому вектор ускорения $\vec{a}$ уровня воды направлен вверх.



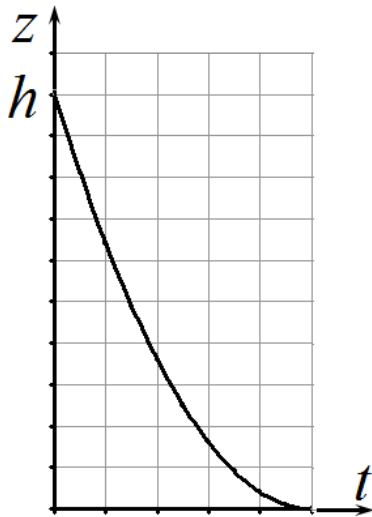
2.1.2 Так как общий объем воды остается неизменным, то между скоростью вытекания v и скоростью опускания уровня V выполняется соотношение

$$SV = sv. \quad (9)$$

Скорость вытекания определяется формулой Торричелли, поэтому искомая зависимость имеет вид

$$V_z = -\frac{s}{S}v = -\frac{s}{S}\sqrt{2gz} = -\sqrt{2\eta^2gz}. \quad (10)$$

Знак минус указывает направление вектора скорости.



2.1.3 Модуль скорости опускания уровня воды изменяется от максимального значения до нуля (при $z = 0$). Графически это означает, что угол наклона касательной к графику зависимости координаты от времени уменьшается от максимального значения до нуля, когда уровень воды достигает нулевой отметки. Схематический график такой зависимости показан на рисунке.

2.2 Вспомогательная задача.

2.2.1 Тело будет двигаться равноускоренно с ускорением свободного падения g . Учитывая направления векторов начальной скорости и ускорения зависимости, проекции скорости $V_y(t)$ и координаты $y(t)$ от времени имеют вид:

$$V_y(t) = V_0 - gt \quad (11)$$

$$y(t) = V_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad (12)$$

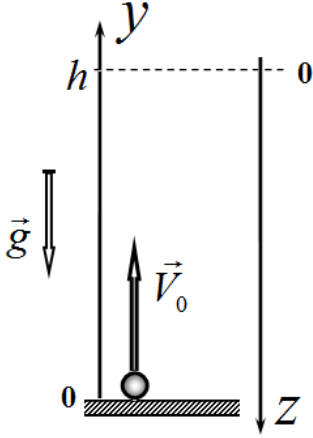
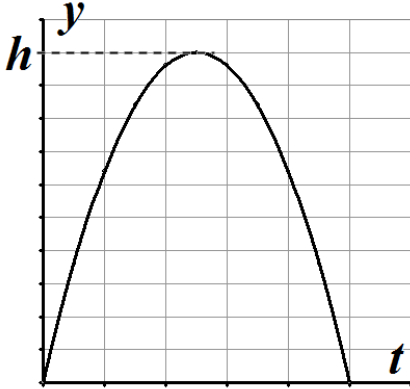


График зависимости координаты от времени $y(t)$ является параболой, ветви которой направлены вниз (см. рис)



2.2.2 Максимальная высота подъема тела $h = z_{\max}$ определяется по известной формуле

$$h = \frac{V_0^2}{2g}. \quad (13)$$

2.2.3 Координаты z и y , и проекции скорости на эти оси связаны простыми геометрическими соотношениями

$$\begin{aligned} z &= h - y \\ V_z &= -V_y. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя найденные ранее зависимости в эти формулы, получим

$$V_z(t) = -V_0 + gt \quad (15)$$

$$z(t) = \frac{V_0^2}{2g} - V_0 t + \frac{gt^2}{2} \quad (16)$$

2.2.4 Для нахождения зависимости проекции скорости тела на ось z от его координаты $V_z(z)$ преобразуем формулу (16) к виду

$$z = \frac{V_0^2}{2g} - V_0 t + \frac{gt^2}{2} = \frac{1}{2g} (V_0^2 - 2gV_0 t + g^2 t^2) = \frac{1}{2g} (V_0 - gt)^2 = \frac{V_z^2}{2g}. \quad (17)$$

Из которого следует, что

$$V_z = \mp \sqrt{2gz}, \quad (18)$$

Причем знак «-» соответствует этапу подъема тела, знак «+» - его падению.

2.3 Возвращение к вытеканию воды.

2.3.1 Сравним результаты решения вспомогательной задачи (п.2.2 на этапе подъема тела) и анализа процесса вытекания воды из сосуда (п.2.1). Для удобства сравнение проведем в Таблице 2.

Таблица 2.

Характеристика	Вспомогательная задача	Вытекание воды
Начальная координата	$z_0 = h$	$z_0 = h$
Модуль начальной скорости: Из формул (13) и (10)	$V_0 = \sqrt{2gh}$	$V_0 = \sqrt{2\eta^2 gh}$
Зависимость скорости от координаты	$V_z = -\sqrt{2gz}$	$V_z = -\sqrt{2\eta^2 gz}$
Зависимость координаты от времени	$z = \frac{1}{2g} (V_0 - gt)^2$	???

Как хорошо видно, эти задачи практически полностью эквивалентны друг другу! Отличие заключается только в величине ускорения. Из сравнения следует, что ускорение, с которым опускается уровень воды постоянно и равно

$$a = \eta^2 g \quad (19)$$

Поэтому и закон движения уровня воды в сосуде будет таким же, только с измененным ускорением (19):

$$z(t) = \frac{1}{2\eta^2 g} (V_0 - \eta^2 gt)^2 = \frac{1}{2\eta^2 g} \left(\sqrt{2\eta^2 gh} - \eta^2 gt \right)^2 \quad (20)$$

2.3.2 Время вытекания находится из формулы (20), в которой следует положить $z = 0$

$$\sqrt{2\eta^2 gh} - \eta^2 g\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (21)$$

Оказывается, что время вытекания столба воды высотой h в η раз меньше, чем время падения с той же высоты.

2.3.3 При расчете следует учесть, что отношение площадей двух кругов пропорционально отношению квадратов их радиусов. Поэтому формула для расчета времени вытекания может быть записана в виде

$$\tau = \left(\frac{R}{r} \right)^2 \sqrt{\frac{2h}{g}} = \left(\frac{5,0}{0,1} \right)^2 \sqrt{\frac{2 \cdot 0,20}{9,8}} = 5,0 \cdot 10^2 \text{ с}. \quad (22)$$

