

Условие

Задание 10-3 Подводный телеграфный кабель.

В настоящее время подавляющий поток информации передается по спутниковым и оптическим каналам связи. Однако глобальная информатизация начиналась с трансатлантических телеграфных кабелей. Историю забывать не следует, поэтому данное задание посвящено изучению некоторых физических явлений, связанных с передачей электрических сигналов по кабелям на большие расстояния.

В задаче рассматривается одножильный медный кабель, диаметр цилиндрической жилы которого равен $d = 5,0$ мм. Медная жила покрыта резиновым изоляционным слоем толщиной $h = 1,0$ мм.

Удельное электрическое сопротивление меди $\rho_0 = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м;

Удельное электрическое сопротивление резины $\rho_1 = 2,1 \cdot 10^{11}$ Ом·м

1. Введение.

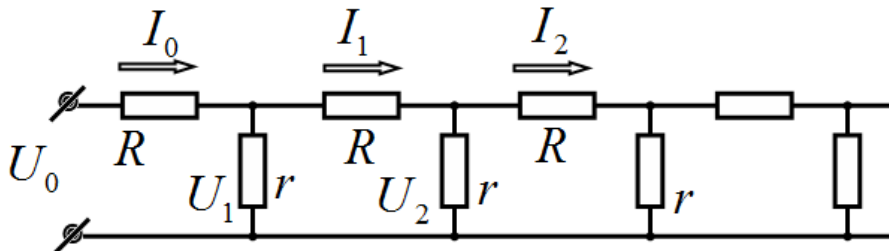
1.1 Рассчитайте электрическое сопротивление R медной жилы длины $L = 1,0$ км.

1.2 Рассчитайте электрическое сопротивление r резинового изоляционного слоя той же длины, через который возможна утечка тока в окружающую среду (например, воду для подводного кабеля).

2. Уменьшение силы тока в кабеле и его утечка.

Не смотря на высокое сопротивление изоляционного слоя, часть тока протекает через изоляционный слой, что приводит к уменьшению силы тока в кабеле. Строгое решение задачи о распределении тока в кабеле с утечкой требует вывода и решения дифференциальных уравнений.

Поэтому в данной задаче мы будем использовать дискретную модель, представляющую бесконечную цепочку резисторов, соединенных по схеме, показанной на рисунке.



В этой схеме резисторы R моделируют сопротивление центральной жилы кабеля, а резисторы r - сопротивление изоляции. Считайте, что их численные значения такие, как найдены в п. 1.1 -1.2.

Пронумеруем все звенья цепи индексом $k = 0, 1, 2, \dots$. Силы токов через резисторы R обозначим $I_0, I_1, I_2, \dots$, а напряжения на резисторах r - $U_0, U_1, U_2, \dots$. Напряжение на входе цепи обозначим U_0 .

2.1 Выразите силу тока в k -том звене I_k через напряжения U_k и U_{k+1} и параметры элементов цепи.

2.2 Получите соотношение, связывающее между собой напряжения U_{k-1}, U_k, U_{k+1} и параметры элементов цепи.

Предположим, что последовательность напряжений $U_0, U_1, U_2, \dots$ представляет собой геометрическую прогрессию. Тогда, напряжения на резисторах утечки можно записать в явном виде

$$U_k = U_0 \lambda^k \quad (1)$$

2.3 Покажите, что сделанное предположение о виде зависимости (1) выполняется, найдите значение знаменателя прогрессии λ . Рассчитайте его численное значение.

2.4 Оцените во сколько раз убывает напряжение и сила тока в кабеле на расстоянии $l = 2000$ км.

Республиканская физическая олимпиада

2021 год.

(III этап)

Решение

Задание 10-3. Подводный телеграфный кабель.

1. Введение.

1.1 Сопротивление центральной медной жилы рассчитывается по известной формуле

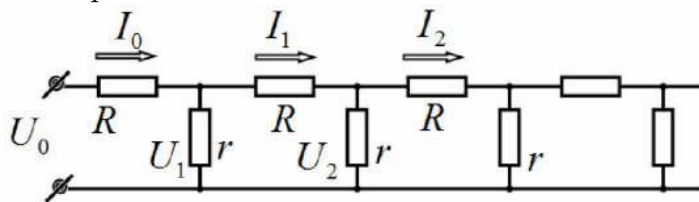
$$R = \rho_0 \frac{L}{S} = \rho_0 \frac{4L}{\pi d^2} = 0,87 \text{ Ом.} \quad (1)$$

1.2 Для расчета сопротивления изоляции необходимо учесть, что ток идет поперек изоляционного слоя, поэтому это сопротивление равно

$$r = \rho_1 \frac{h}{2\pi dL} = 6,7 \cdot 10^6 \text{ Ом.} \quad (2)$$

2. Уменьшение силы тока в кабеле и его утечка.

2.1 По определению электрического напряжения, для каждой ячейки, состоящей из двух резисторов r и



Х класс. Теоретический тур. Вариант 1.

одного резистора R напряжение может быть представлено в виде

$$U_k = I_k R + U_{k+1} \quad (3)$$

Из этой формулы следует, что

$$I_k = \frac{U_k - U_{k+1}}{R} \quad (4)$$

2.2 Рассматривая силы токов, входящих в каждый верхний узел цепи, можно записать

$$I_{k-1} = I_k + \frac{U_k}{r}. \quad (5)$$

здесь $\frac{U_k}{r}$ - сила тока утечки в данном звене. Если подставить выражения для сил токов (4) в формулу (5), то получим искомое соотношение между напряжениями

$$\frac{U_{k-1} - U_k}{R} = \frac{U_k}{r} + \frac{U_k - U_{k+1}}{R}. \quad (6)$$

Его удобно представить в виде

$$U_{k-1} - \left(2 + \frac{R}{r}\right) U_k + U_{k+1} = 0. \quad (7)$$

2.3 Для проверки предположения о геометрической прогрессии, подставим явные выражения для напряжений $U_k = U_0 \lambda^k$ в формулу (7):

$$U_0 \lambda^{k-1} - \left(2 + \frac{R}{r}\right) U_0 \lambda^k + U_0 \lambda^{k+1} = 0. \quad (8)$$

После сокращения, получим квадратное уравнение для знаменателя прогрессии

$$\lambda^2 - \left(2 + \frac{R}{r}\right) \lambda + 1 = 0. \quad (9)$$

Таким образом, предположение о геометрической прогрессии выполняется, если ее знаменатель λ удовлетворяет уравнению (9). Решением этого уравнения являются числа

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{R}{2r} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{R}{2r}\right)^2 - 1} \quad (10)$$

Из двух корней этого уравнения следует выбрать корень со знаком «минус», так как второй корень оказывается больше 1. В этом случае напряжения и, следовательно, силы токов должны возрастать до бесконечности, что физически не возможно. Аккуратное вычисление параметра λ приводит к значению $\lambda = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon = 3,6 \cdot 10^{-4}$.

Обратите внимание на интересную «игру» малых величин: отношение сопротивлений, входящих в формулу (10) величина порядка 10^{-8} , найденный по этой формуле корень отличается от единицы на величину порядка 10^{-8} . При умении правильно работать с малыми величинами этот результат можно получить следующим образом:

$$\lambda = 1 + \frac{R}{2r} - \sqrt{\left(1 + \frac{R}{2r}\right)^2 - 1} = 1 + \frac{R}{2r} - \sqrt{\frac{R}{r} + \left(\frac{R}{2r}\right)^2} \approx 1 - \sqrt{\frac{R}{r}}$$

На последнем шаге отброшен малые величины

X класс. Теоретический тур. Вариант 1.

Задание 10-3. Подводный телеграфный кабель.

1. Введение.

1.1 Сопротивление центральной медной жилы рассчитывается по известной формуле

$$R = \rho_0 \frac{L}{S} = \rho_0 \frac{4L}{\pi d^2} = 0,87 \text{ Ом}. \quad (1)$$

1.2 Для расчета сопротивления изоляции необходимо учесть, что ток идет поперек изоляционного слоя, поэтому это сопротивление равно

$$r = \rho_1 \frac{h}{2\pi dL} = 6,7 \cdot 10^6 \text{ Ом}. \quad (2)$$

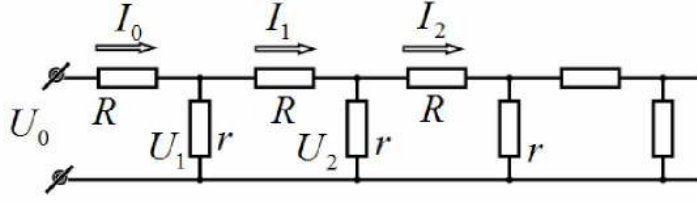
2. Уменьшение силы тока в кабеле и его утечка.

2.1 По определению электрического напряжения, для каждой ячейки, состоящей из двух резисторов r и одного резистора R напряжение может быть представлено в виде

$$U_k = I_k R + U_{k+1} \quad (3)$$

Из этой формулы следует, что

$$I_k = \frac{U_k - U_{k+1}}{R} \quad (4)$$



2.2 Рассматривая силы токов, входящих в каждый верхний узел цепи, можно записать

$$I_{k-1} = I_k + \frac{U_k}{r}. \quad (5)$$

здесь $\frac{U_k}{r}$ - сила тока утечки в данном звене.

Если подставить выражения для сил токов (4) в формулу (5), то получим искомое соотношение между напряжениями

$$\frac{U_{k-1} - U_k}{R} = \frac{U_k}{r} + \frac{U_k - U_{k+1}}{R}. \quad (6)$$

Его удобно представить в виде

$$U_{k-1} - \left(2 + \frac{R}{r}\right) U_k + U_{k+1} = 0. \quad (7)$$

2.3 Для проверки предположения о геометрической прогрессии, подставим явные выражения для напряжений $U_k = U_0 \lambda^k$ в формулу (7):

$$U_0 \lambda^{k-1} - \left(2 + \frac{R}{r}\right) U_0 \lambda^k + U_0 \lambda^{k+1} = 0. \quad (8)$$

После сокращения, получим квадратное уравнение для знаменателя прогрессии

$$\lambda^2 - \left(2 + \frac{R}{r}\right) \lambda + 1 = 0. \quad (9)$$

Таким образом, предположение о геометрической прогрессии выполняется, если ее знаменатель λ удовлетворяет уравнению (9). Решением этого уравнения являются числа

X класс. Теоретический тур. Вариант 1.

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{R}{2r} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{R}{2r}\right)^2 - 1} \quad (10)$$

Из двух корней этого уравнения следует выбрать корень со знаком «минус», так как второй корень оказывается больше 1. В этом случае напряжения и, следовательно, силы токов должны возрастать до бесконечности, что физически не возможно.

Аккуратное вычисление параметра λ приводит к значению $\lambda = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon = 3,6 \cdot 10^{-4}$.

Обратите внимание на интересную «игру» малых величин: отношение сопротивлений, входящих в формулу (10) величина порядка 10^{-8} , найденный по этой формуле корень отличается от единицы на величину порядка 10^{-8} . При умении правильно работать с малыми величинами этот результат можно получить следующим образом:

$$\lambda = 1 + \frac{R}{2r} - \sqrt{\left(1 + \frac{R}{2r}\right)^2 - 1} = 1 + \frac{R}{2r} - \sqrt{\frac{R}{r} + \left(\frac{R}{2r}\right)^2} \approx 1 - \sqrt{\frac{R}{r}}$$

На последнем шаге отброшены малые величины, имеющие больший порядок, чем 0,5. Эта элементарная цепочка приближений дает тот же результат, что и громоздкий расчет по формуле (10)

2.4 Так как все наши расчеты приведены для одного звена длиной в 1 км, по расстоянию в 2000 км соответствует $N = 2000$ звеньев. С помощью формулы для геометрической прогрессии, находим, что убывание напряжения в кабеле равно

$$\frac{U_{2000}}{U_0} = (1 - \varepsilon)^N \approx 0,5 \quad (11)$$

т.е. примерно в 2 раза. Во столько же раз убывает и сила тока в кабеле.

Не смотря на то, что сопротивление утечки почти в 10 миллионов раз превышает сопротивление основной жилы, на больших расстояния утечки тока оказываются существенными.

, имеющие больший порядок, чем 0,5. Эта элементарная цепочка приближений дает тот же результат, что и громоздкий расчет по формуле (10)

2.5 Так как все наши расчеты приведены для одного звена длиной в 1 км, по расстоянию в 2000 км соответствует $N = 2000$ звеньев. С помощью формулы для геометрической прогрессии, находим, что убывание напряжения в кабеле равно

$$\frac{U_{2000}}{U_0} = (1 - \varepsilon)^N \approx 0,5 \quad (11)$$

т.е. примерно в 2 раза. Во столько же раз убывает и сила тока в кабеле.

Не смотря на то, что сопротивление утечки почти в 10 миллионов раз превышает сопротивление основной жилы, утечки тока оказываются существенными для длинного кабеля.

Х класс. Теоретический тур. Вариант 1.

Решения задач. 11 класс