

## Условие

### Задача 11-2. Поле пластин

В данной задаче вам предстоит рассмотреть электростатическое поле, создаваемое участками равномерно заряженных плоскостей.

Для рассмотрения подобных конфигураций часто пользуются понятием телесного угла  $\Omega$ . Телесный угол  $\Omega$  – это часть пространства, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность (которая называется поверхностью, стягивающей данный телесный угол). Границей телесного угла является некоторая коническая поверхность.

Телесный угол измеряется отношением площади  $S$  той части сферы с центром в вершине угла, которая вырезается этим телесным углом, к квадрату радиуса  $R$  сферы:  $\Omega = \frac{S_{сф}}{R^2}$ , по аналогии с тем, как радианную меру угла определяют как отношение длины дуги, вырезаемой данным центральным углом, к радиусу окружности (Рис.1). Телесные углы измеряются в безразмерных величинах, называемых стерadianами (ср).  $\Omega = 1$  ср равен телесному углу, вырезающему из сферы радиуса  $R$  поверхность с площадью  $R^2$ . Полная сфера образует телесный угол, равный  $4\pi$  стерadian (полный телесный угол), для вершины, расположенной внутри сферы, в частности, для центра сферы.

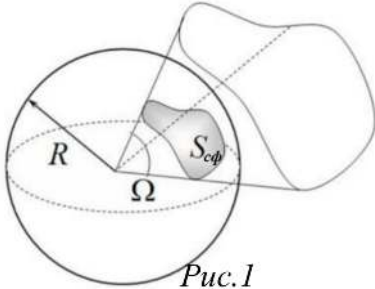


Рис.1

#### Часть 1. «Кусок» равномерно заряженной плоскости.

1.1. Покажите, что телесный угол, под которым «видна» небольшая часть плоскости (Рис.2) из точки наблюдения даётся выражением

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S \cos \theta}{r^2},$$

где  $\theta$  – угол между радиус-вектором, проведенным из центра данной площадки к точке наблюдения, и единичным вектором  $\vec{n}$  нормали к поверхности.

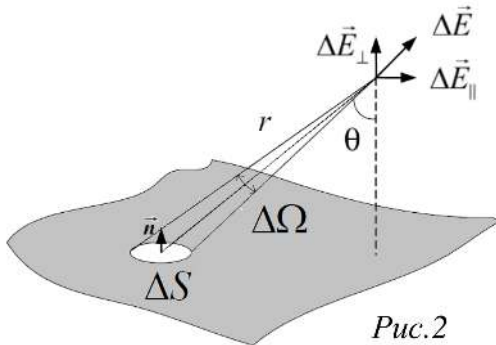
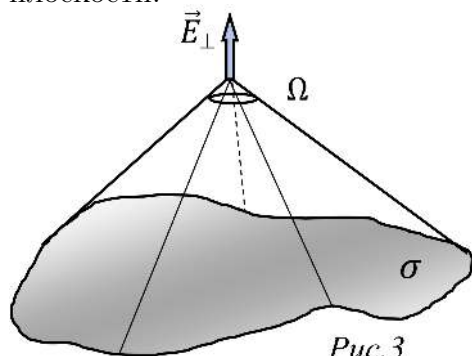


Рис.2

1.2. Докажите, что составляющая вектора напряженности электростатического поля, перпендикулярная поверхности равномерно заряженного участка плоскости (Рис. 3), определяется выражением:

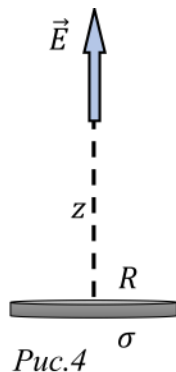
$$E_{\perp} = \frac{\sigma \Omega}{4\pi\epsilon_0},$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда,  $\Omega$  – телесный угол, стягиваемый этим участком плоскости.

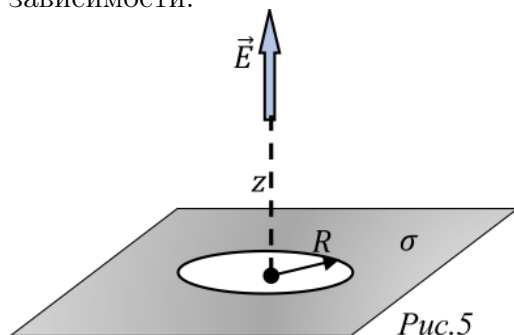


1.3. Найдите напряженность электростатического поля  $E$ , создаваемого бесконечной плоскостью, по которой равномерно распределен заряд, поверхностная плотность которого равна  $\sigma$ .

1.4. Найдите зависимость напряженности электростатического поля  $E(z)$  равномерно заряженного диска радиуса  $R$  с поверхностной плотностью  $\sigma$  (Рис. 4) на его оси от расстояния  $z$  до его центра. Укажите, как изменяется данное выражение при  $z \gg R$  и при  $z \ll R$ . Постройте схематический график полученной зависимости.



1.5. Пусть имеется бесконечная равномерно заряженная плоскость с круглым отверстием радиуса  $R$  (Рис. 5). Найдите зависимость напряженности электростатического поля  $E(z)$  на оси симметрии системы от расстояния  $z$  до центра отверстия. Укажите, как изменяется данное выражение при  $z \gg R$  и при  $z \ll R$ . Постройте схематический график полученной зависимости.

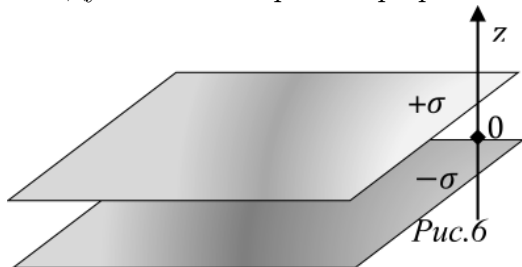


1.6. Найдите период малых колебаний точечного заряда  $Q$  массы  $m$  вблизи центра данного отверстия. Укажите, каким должен быть знак данного точечного заряда, чтобы подобное

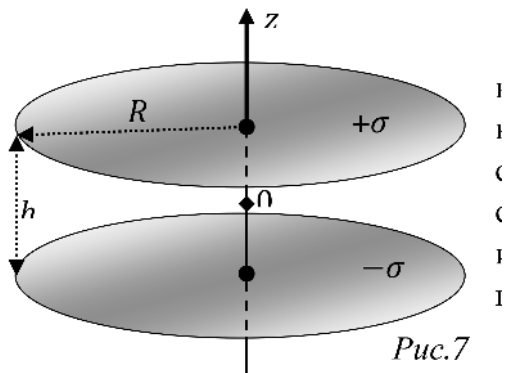
колебательное движение было возможным.

## Часть 2. Плоский конденсатор

**2.1.** Найдите зависимость напряженности электростатического поля  $E(z)$  между двумя бесконечными равномерно заряженными пластинами от расстояния до серединной плоскости между ними. Постройте график полученной зависимости.



**2.2.** Пусть плоский конденсатор представлен в виде двух круглых равномерно заряженных пластин (рис.7). Найдите напряженность электростатического поля на оси данной системы  $E(z)$  в зависимости от расстояния до середины отрезка, соединяющего центры пластин конденсатора. Укажите, как изменяется полученное Вами выражение при  $z \gg R$ . Постройте график полученной зависимости при  $R = 2h$ .



**2.3.** Найдите относительную погрешность при расчете напряженности при  $z = 0$  без учета конечных размеров пластин конденсатора по сравнению с результатами, полученными в пункте 2.2, при а)  $R = h$ ; б)  $R = 10h$ ; в)  $R = 100h$ .

**Подсказки:** 1) Телесный угол, соответствующий конусу с углом полураствора  $\alpha$ , определяется по формуле:  $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$  2) При малых  $|x| \ll 1$  справедливо приближение:  $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ .

