

Условие

Задание 11-2. Установление вида зависимости

Описание установки.

В данной задаче исследуются малые колебания крутильного маятника. Схема маятника показана на рис. 1

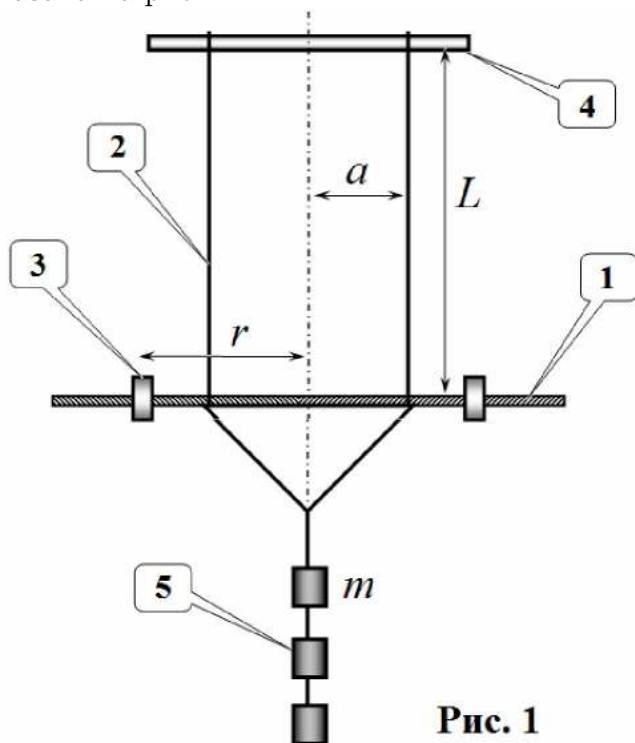


Рис. 1

Металлический стержень с резьбой 1 подвешен симметрично на двух вертикальных нитях 2. Нити располагаются вертикально на расстоянии a от оси маятника. Длину нитей обозначим L . По стержню можно передвигать две гайки 3, расположенные симметрично на расстоянии r от оси маятника. Верхние концы нити привязаны к стержню 4 (в качестве которого используется карандаш), который закрепляется горизонтально в лапке штатива (на рис. 1 не показан). К стержню снизу могут прикрепляться дополнительные грузы 5, общая масса которых равна m .

В работе необходимо измерять период крутильных колебаний стержня – его вращение вокруг оси маятника в горизонтальной плоскости, сама ось симметрии должна оставаться неподвижной.

Будьте аккуратны при сборке установки: - все установка должна быть симметрична; - нижние дополнительные грузы обязательно подвешивайте к треугольному подвесу с помощью кусочка вертикальной нити, так, чтобы в процессе колебаний стержня грузы не вращались; - При подвязывании нитей используйте петли, чтобы можно было легко их передвигать.

Период крутильных колебаний стержня является сложной и неизвестной функцией параметров установки $T = F(m, L, a, r)$, которую Вам необходимо исследовать экспериментально. Выводить теоретически эту функцию не требуется.

При экспериментальном исследовании зависимостей следует изменять только один параметр, остальные оставляя неизменными. В этом случае удастся получить вид зависимости исследуемой величины (в данном случае – периода колебаний) от изменяемого параметра. Вид этой однопараметрической зависимости можно предсказать теоретически, не решая полностью задачу «в общем виде».

Именно такой подход к экспериментальным исследованиям Вы должны реализовать при выполнении данного задания.

Теоретическое введение.

При расчете периодов часто используется подход, основанный на использовании закона сохранения механической энергии:

$$E_k(\omega) + U(\varphi) = E_0. \quad (1)$$

XI класс. Экспериментальный тур. Вариант 2 4

В этом уравнении $U(\varphi)$ - потенциальная энергия системы, как функция угла поворота стержня в горизонтальной плоскости. При малых колебаниях эта функция приближенно может быть представлена в виде

$$U(\varphi) \approx K\varphi^2, \quad (2)$$

где K - постоянный коэффициент, зависящий от параметров системы. $E_k(\omega)$ - кинетическая энергия системы, зависящая от угловой скорости вращения стержня ω . При малых колебаниях эта функция имеет вид

$$E_k(\omega) \approx M\omega^2, \quad (3)$$

где M - постоянный коэффициент, также зависящий от параметров системы. При выполнении условий (2)-(3) период колебаний определяется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}. \quad (4)$$

Часть 1. Основной набор параметров.

Соберите установку при следующих параметрах: длина нитей подвеса $L_0 = 30$ см; расстояние от нитей подвеса до оси маятника $a_0 = 2,0$ см; гайки находятся в центре стержня $r_0 \approx 0$; дополнительные грузы отсутствуют $m_0 = 0$;

Эти значения параметров далее будем называть «основными». Все дальнейшие измерения проводите при этих значениях, за исключением того параметра, который вы варьируете в эксперименте.

1.1 Измерьте период крутильных колебаний стержня T_0 при основном наборе параметров. Оцените погрешность измеренного значения периода колебаний.

В дальнейших измерениях оценка погрешностей не требуется. В дальнейших частях задания при обработке результатов используйте отношение периода колебаний T , к найденному значению периода при основных параметрах T_0 . Обозначим это отношение $z = \frac{T}{T_0}$

Часть 2. Зависимость периода колебаний от числа подвешенных грузов $T(n)$

2.1 Какой из коэффициентов K или M будет изменяться при изменении массы дополнительных грузов? Определите вид этой зависимости. 2.2 Укажите вид зависимости параметра z от числа подвешенных грузов n . 2.3 Укажите, в каких переменных исследуемая зависимость будет линейной. Укажите (если это возможно) физический смысл параметров этой линейной зависимости.

XI класс. Экспериментальный тур. Вариант 2 5

2.4 Проведите измерения зависимости периода колебаний стержня от числа подвешенных грузов. 2.5 Представьте полученную зависимость в виде линеаризованного графика. 2.6 Рассчитайте численные значения коэффициентов линеаризованной зависимости. Определите возможные значения параметров установки, которые можно найти из данного эксперимента.

Снимите дополнительные грузы – далее они вам не понадобятся.

Часть 3. Зависимость периода колебаний маятника от положения гаек $T(r)$

3.1 Какой из коэффициентов K или M будет изменяться при изменении положения гаек r ?

Определите вид этой зависимости. 3.2 Укажите вид зависимости параметра z от положения гаек r .

3.3 Укажите, в каких переменных исследуемая зависимость будет линейной. 3.4

Постройте график линеаризованной зависимости. Подтверждает ли он ваши теоретические предсказания?

Часть 4. Зависимость периода колебаний от отношения $\eta = \frac{L}{a}$.

Зависимость периода колебаний от отношения $\eta = \frac{L}{a}$ имеет вид

$$z(\eta) = \frac{T}{T_0} = \eta^\gamma \sqrt{\frac{L_0}{L}} \quad (5)$$

Выводить эту формулу не нужно.

4.1 Укажите, в каких переменных исследуемая зависимость будет линейной. Из возможных вариантов выберите тот, который позволяет определить параметр γ .

4.2 Проведите измерения зависимости периода колебаний стержня от отношения $\eta = \frac{L}{a}$ 4.3

Представьте полученную зависимость в виде линеаризованного графика, позволяющего определить показатель степени γ . 4.4 Рассчитайте численное значение показателя степени γ .

XI класс. Экспериментальный тур. Вариант 2 6

Решение

Задание 11-2. Установление вида зависимости

Часть 1. Основной набор параметров.

Для выполнения задания необходимо провести несколько измерений периода колебаний и провести их обработку. В результате проведенных измерений получено следующее значение периода

$$T_0 = (1,58 \pm 0,03)\text{с} \quad (1)$$

****Часть 2. Зависимость периода колебаний от числа подвешенных грузов $T(n)$ ****

2.1 При колебаниях стержня изменяется потенциальная энергия в поле тяжести земли, так как сам стержень немного приподнимается. Следовательно, при подвешивании дополнительных грузов будет изменяться параметр K это изменение можно представить в виде

$$\frac{K}{K_0} = \frac{m_0 + nm}{m_0} = 1 + n \frac{m}{m_0} \quad (2)$$

Следовательно, период колебаний будет изменяться по закону

$$z = \frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{1}{1 + n \frac{m}{m_0}}} \quad (3)$$

Чтобы линеаризовать эту зависимость ее следует представить в виде $\frac{1}{T^2} = f(n)$.

В таблице 1. Приведены результаты измерений и расчетов, для проверки зависимости (3).

Таблица 1.

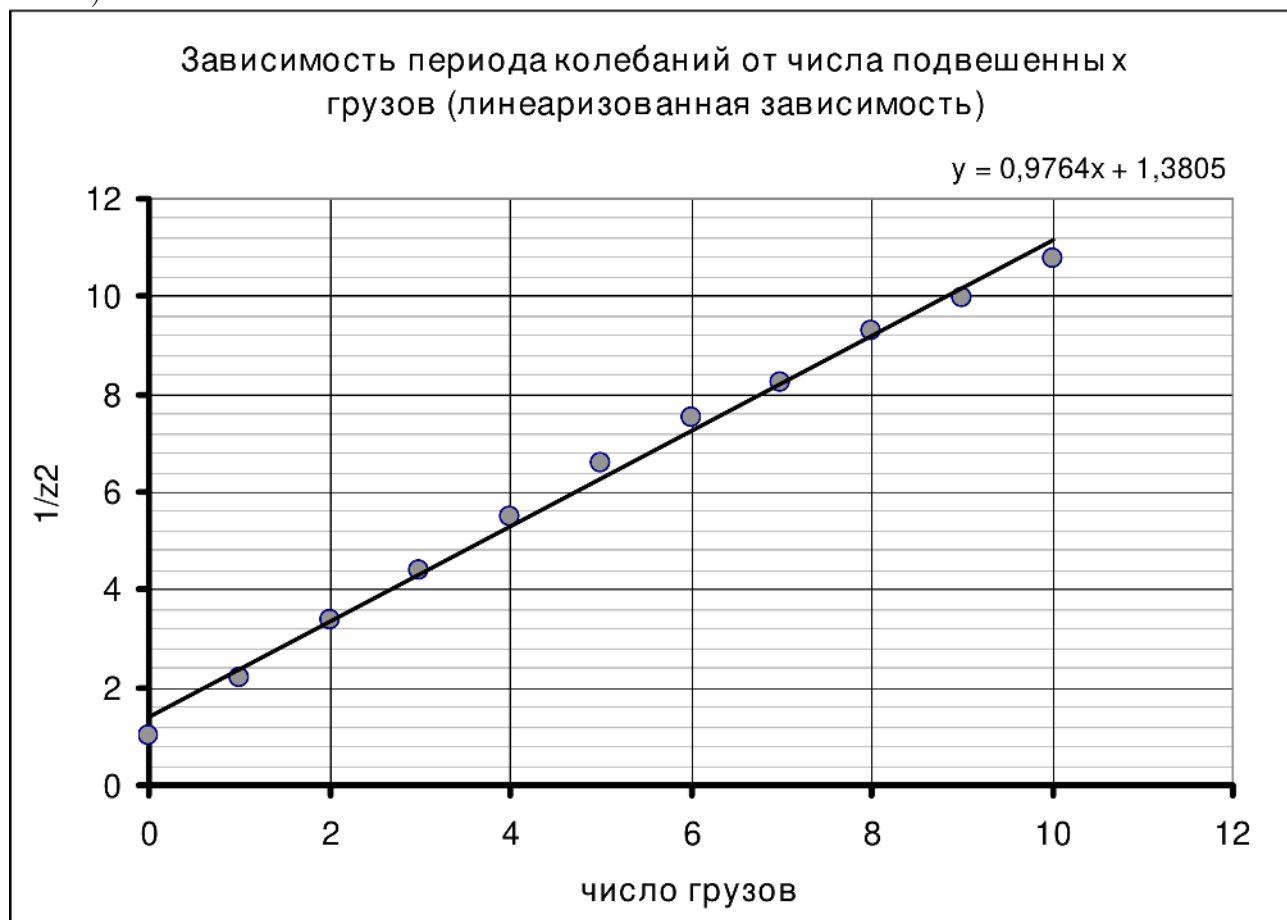
n	t1	t2	t3	T _{ср}	z	1/z ²
0	7,89	7,93	7,91	1,582	1,000	1,000
1	5,33	5,37	5,34	1,069	0,676	2,189
2	4,31	4,32	4,27	0,860	0,544	3,384
3	3,75	3,81	3,74	0,753	0,476	4,410
4	3,38	3,39	3,34	0,674	0,426	5,509
5	3,10	3,07	3,08	0,617	0,390	6,581
6	2,88	2,90	2,87	0,577	0,365	7,526
7	2,72	2,80	2,74	0,551	0,348	8,253
8	2,59	2,61	2,58	0,519	0,328	9,303
9	2,52	2,49	2,51	0,501	0,317	9,958
10	2,45	2,40	2,38	0,482	0,305	10,773

В таблице указаны времена 5 колебаний, измеренные три раза. График линеаризованной зависимости (показанный на рисунке) построен по первому и последнему столбцу данной таблицы.

$$\sqrt{\frac{1}{1 + n \frac{m}{m_0}}}$$

XI класс. Экспериментальный тур. Вариант 2. 4

Зависимость периода колебаний от числа подвешенных грузов (линеаризованная зависимость)



Полученная зависимость близка к линейной, что подтверждает сделанные предположения.

Заметные и систематические отклонения экспериментальных точек от линейной зависимости объясняются тем, что при колебаниях стержня грузы также слегка приводят в движение. Следовательно, их число также незначительно влияет и на параметр M в теоретической модели.

Часть 3. Зависимость периода колебаний маятника от положения гаек $T(r)$

При изменении положения гаек потенциальная кривая не изменяется. Но это влияет на кинетическую энергию системы, которой добавляется слагаемое, описывающее кинетическую энергию гаек:

$$E_k = (A + mr^2) \frac{\omega^2}{2}$$

Следовательно, в данном эксперименте изменяется параметр M . Поэтому, зависимость периода колебаний от расстояния r имеет вид:

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{A + mr^2}{A}}.$$

Для линеаризации данной зависимости следует представить ее в виде $Z^2 = f(r^2)$

В таблице 2 приведены результаты измерений и расчетов требуемых параметров.

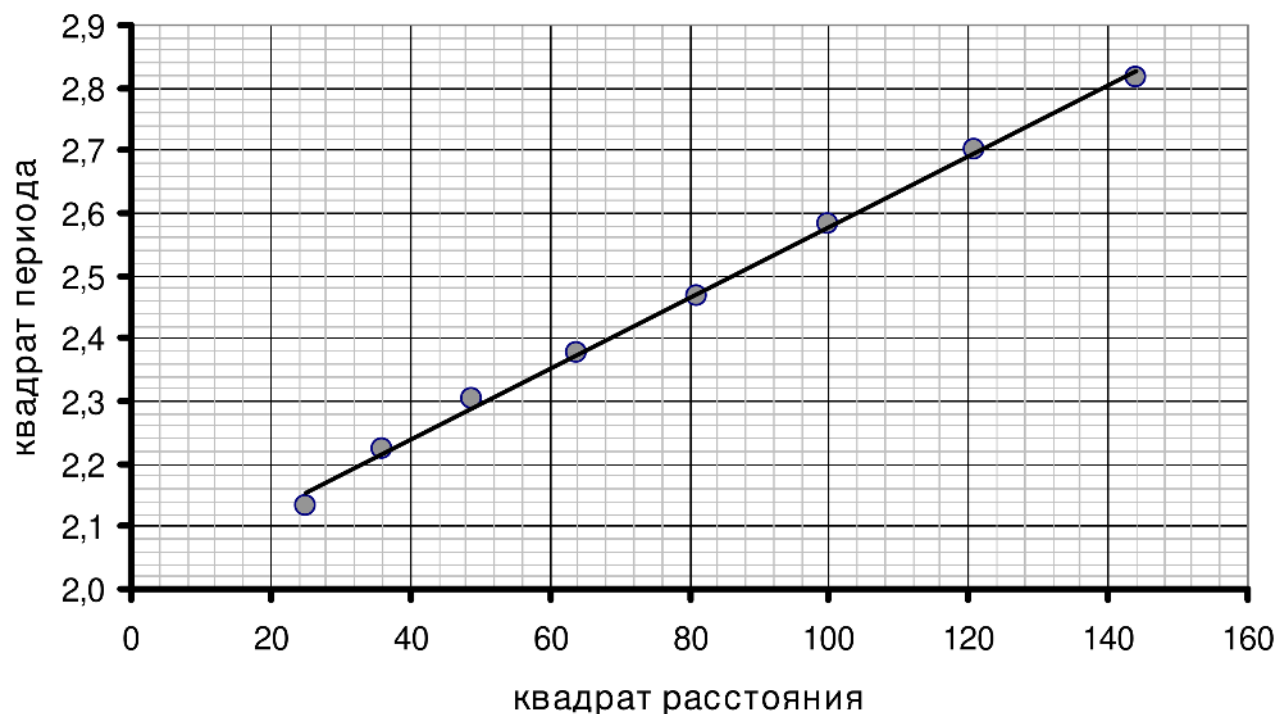
XI класс. Экспериментальный тур. Вариант 2. 5

Таблица 2.

r, см	t1	t2	t3	T _{cp}	T ² _{cp}	r ²
12	8,43	8,35	8,39	1,678	2,816	144
11	8,21	8,27	8,18	1,644	2,703	121
10	8,05	8,03	8,02	1,607	2,581	100
9	7,86	7,87	7,84	1,571	2,469	81
8	7,72	7,72	7,69	1,542	2,378	64
7	7,60	7,56	7,61	1,518	2,304	49
6	7,48	7,42	7,47	1,491	2,224	36
5	7,28	7,33	7,29	1,460	2,132	25

График линеаризованной зависимости показан ниже.

Зависимость периода от положения гаек



Полученная зависимость полностью подтверждает результаты теоретического анализа.

XI класс. Экспериментальный тур. Вариант 2. 6

Часть 4. Зависимость периода колебаний от отношения $\eta = \frac{L}{a}$. Предложенная в условии зависимость допускает необычную линеаризация: Зависимость переменной $Y = \ln(T\sqrt{L})$ от переменной $X = \ln\left(\frac{a}{L}\right)$ должна быть линейной.

В таблице 3 приведены результаты необходимых измерений и расчетов. Таблица 3.

a, см	L, см	t1	t2	t3	T _{ср}	a/L	X	Y
5	30	8,43	8,35	8,39	1,678	0,167	-1,792	2,218
5	27,5	7,78	7,75	7,78	1,554	0,182	-1,705	2,098
5	24,5	7,47	7,48	7,41	1,491	0,204	-1,589	1,999
5	21,3	6,73	6,67	6,70	1,340	0,235	-1,449	1,822
5	18,5	6,00	6,42	6,39	1,254	0,270	-1,308	1,685
4	30	10,48	10,47	10,42	2,091	0,133	-2,015	2,438
3	30	14,09	13,97	13,99	2,803	0,100	-2,303	2,731
2	30	19,53	19,50	19,71	3,921	0,102	-2,708	3,067

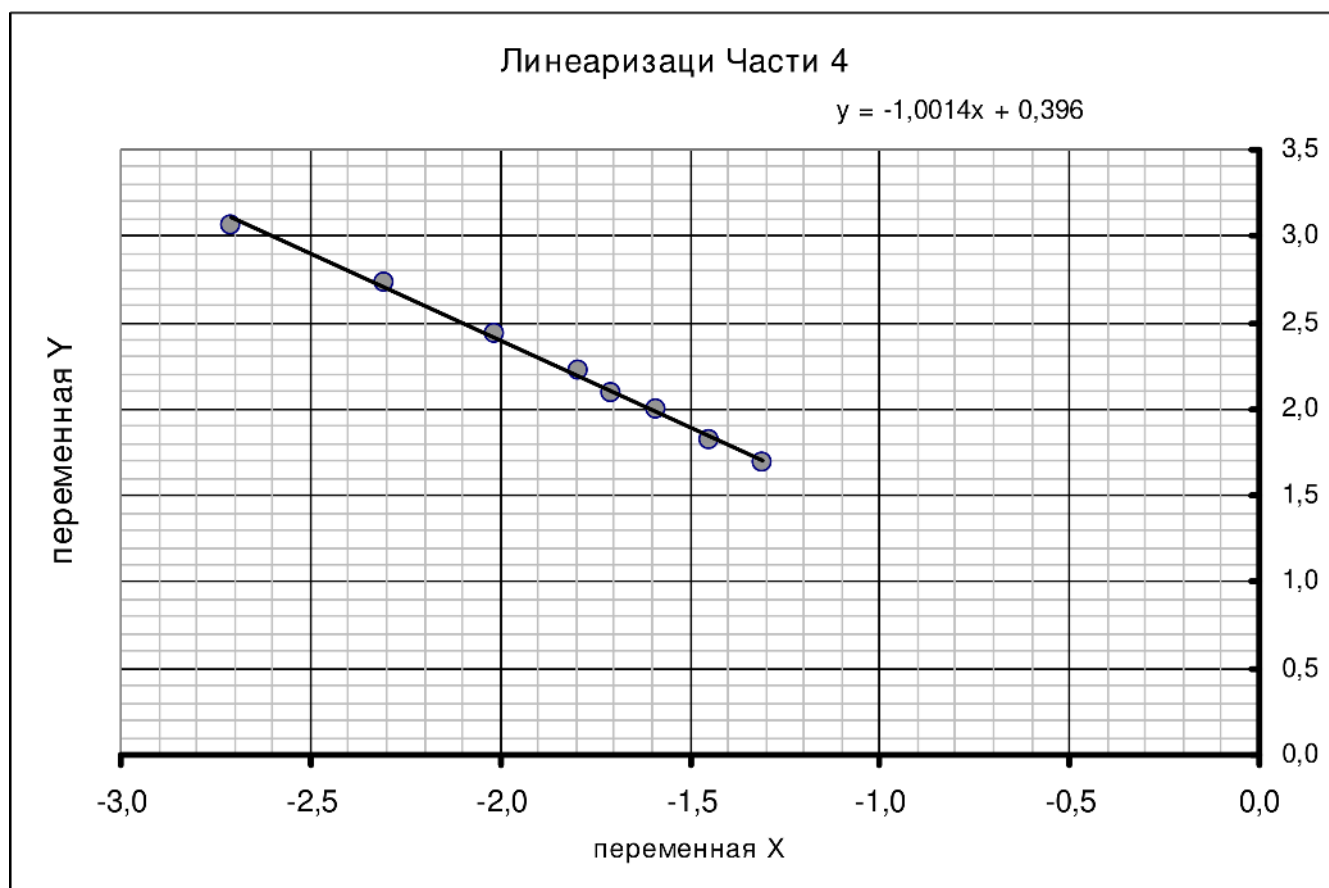


График линеаризованной зависимости подтверждает предложенную автором задачи зависимость. Коэффициент наклона графика (т.е. искомый показатель степени) равен

$$\gamma = -1.$$

XI класс. Экспериментальный тур. Вариант 2. 7