

## Условие

### Задача 9-1. Собака и поводок

Всякая бродячая собака, по словам М. Булгакова, мечтает об ошейнике. Добавим к ошейнику и поводок. Когда собака бежит от радости, поводок с ручкой движется за ней, но... совсем по другому закону. Цель данной задачи научиться рассчитывать закон движения конца поводка по известному закону движения собаки.

Формализуем задачу: материальная точка  $A$  (т.е. собака) движется по заданному закону. Материальная точка  $B$  (конец поводка с ручкой) связана с точкой  $A$  гибкой невесомой нерастяжимой веревкой длины  $l = 3,0$  м. Движение точки  $B$  зависит не только от того, как движется точка  $A$ , но и от характера сил, действующих на точку  $B$ , поэтому решить задачу о движении точки  $B$  в общем виде нельзя. Мы рассмотрим 3 частных случая такого движения.

#### Часть 1. Очень медленное движение (ползком).

Точка  $A$  движется вдоль прямой линии. График закона движения (зависимости координаты от времени) этой точки показан на рисунке. В начальный момент времени точка  $B$  находится в начале координат  $x_B(0) = 0$ .

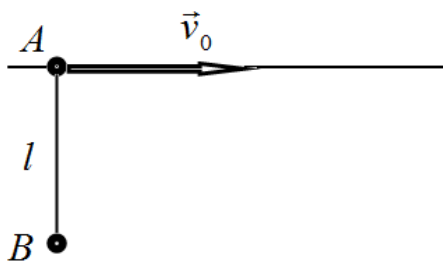


При медленном движении можно пренебречь инерционными свойствами точки  $B$ .

1.1 Постройте график закона движения точки  $B$ . 1.2 Рассчитайте пути, пройденные точками  $A$  и  $B$  за 60 секунд движения.

#### Часть 2. Движение без трения.

В данной части будем считать, что точка  $B$  движется по гладкой поверхности без трения (например, по гладкому льду). Точка  $A$  движется по прямой линии с постоянной скоростью  $v_0 = 6,0 \frac{м}{с}$ . В момент времени  $t = 0$  точка  $B$  находится на расстоянии  $l = 3,0$  м в направлении перпендикулярном прямой, вдоль которой движется точка  $A$ . В этот момент поводок натянут, точка  $B$  покоится.



2.1 Кратко опишите словесно движение точки  $B$ . 2.2 Постройте схематический рисунок траектории точки  $B$ . 2.3 Чему равна максимальная скорость точки  $B$  в процессе движения?

### Часть 3. Очень вязкое трение.

В данной части считаем, что на точку  $B$  действует сила вязкого трения пропорциональная скорости точки. Подсказка. Если на тело действует внешняя сила  $\vec{F}_0$  и большая сила вязкого трения, пропорциональная скорости  $\vec{F}_{\text{сопр.}} = -\beta\vec{v}$ , то в любой момент времени вектор скорости точки  $\vec{v}$  совпадает по направлению с вектором силы  $\vec{F}_0$ .

Точка  $A$  движется по окружности радиуса  $R = 2l = 6,0\text{ м}$  с постоянной по модулю скоростью  $v_0 = 6,0\frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

3.1 Определите по какой траектории движется точка  $B$ , укажите параметры этой траектории.

3.2 Чему равен модуль скорости точки  $B$  в этом случае?

### Решение

#### Задача 9-1. Собака и поводок

##### Часть 1. Очень медленное движение (ползком).

1.1 Для построения графика движения необходимо учесть, что точка  $B$  начинает двигаться, если ее расстояние до точки  $A$  начинает превышать длину поводка  $l = 3,0\text{ м}$ . При движении точки  $B$ , ее координата меньше координаты точки  $A$  на величину  $l$  при движении точки  $A$  в положительном направлении оси, и больше координаты точки на величину  $l$  при движении последней в отрицательном направлении. С помощью таких рассуждений построен график закона движения точки  $B$ , который показан на рис. 1.



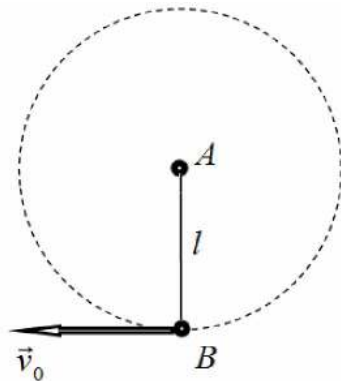
1.2 Пути, пройденные рассматриваемыми материальными точками легко подсчитать по построенным графикам:

$$\begin{aligned} S_A &= 6 + 3 + 6 + 4 + 2 + 6 = 27 \text{ м} \\ S_B &= 3 + 3 + 3 = 9,0 \text{ м} \end{aligned} \quad (1)$$

IX класс. Теоретический тур. Вариант 1.

**Часть 2. Движение без трения.**

2.1 Эту часть задачи проще всего решить, если перейти в систему отсчета, связанную с точкой А. В этой системе отсчета в начальный момент времени точка В получает скорость  $v_0$ , направленную перпендикулярно веревке. Так как на точку В действует только сила натяжения веревки, то в этой системе отсчета эта точка будет двигаться по окружности радиуса  $l$  вокруг точки А (см. рис.)



2.2 В исходной, неподвижной системе отсчета движение точки В будет являться суперпозицией движения по окружности с постоянной по модулю скоростью поступательного движения  $v_0$  и поступательного движения центра окружности с той же скоростью  $v_0$ . Результатом такого наложения является движение по циклоиде, вид которой показан на следующем рисунке.

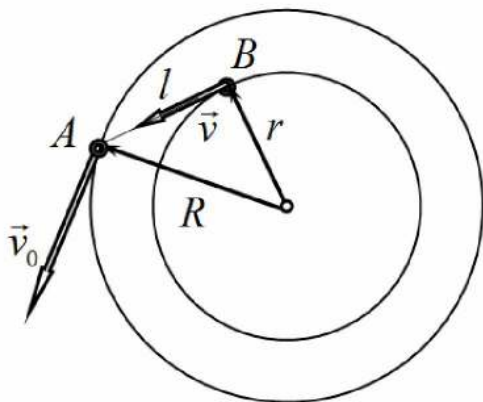


2.3 Скорость точки В будет максимальна, когда вектор ее скорости относительно точки А совпадет по направлению с вектором скорости точки А (на рисунке – это верхняя точка траектории  $B_1$ ). В этот момент времени скорость точки будет равна

$$v_{\max} = 2v_0. \quad (2)$$

### Часть 3. Очень вязкое трение.

3.1 Из приведенной подсказки следует, что вектор скорости точки В направлен вдоль поводка, то есть, направлен на точку А. Не сложно сообразить, что в этом случае траекторией точки В также будет окружность, концентрическая с траекторией точки А. На рисунке показаны обе траектории и векторы скоростей обеих точек.



3.2 Из рисунка следует, что радиус окружности, по которой движется точка В, равен

$$r = \sqrt{R^2 - l^2} \approx 5,2 \text{ м}. \quad (3)$$

3.3 Так как угловые скорости движения точек равны, то модуль скорости точки В оказывается равным

$$\frac{v_0}{R} = \frac{v}{r} \Rightarrow v = v_0 \frac{r}{R} \approx 5,2 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (4)$$

IX класс. Теоретический тур. Вариант 1.