

Условие

Задание 11-2. Магнетизм и теплота.

Однослойная обмотка длинного кругового соленоида (катушки) содержит N плотно намотанных витков. Длина соленоида равна l , его радиус равен r_0 намного меньше длины соленоида. В работе используется источник постоянного напряжения U_0 (фактически это ЭДС), его внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.

Подсказка. Если по обмотке соленоида протекает электрический ток силой I , то внутри соленоида создается однородное магнитное поле, индукция которого определяется по формуле:

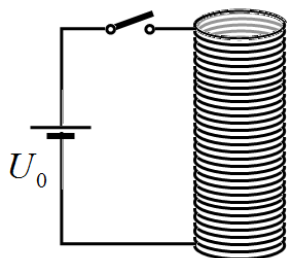
$$B = \mu_0 n I, \quad (1)$$

где $n = \frac{N}{l}$ - число витков на единицу длины (плотность намотки).

Часть 1. Основные понятия.

1.1 Определите индуктивность L данного соленоида.

Далее индуктивность соленоида L можно считать известной. Соленоид подключают к источнику и замыкают ключ. Пусть сопротивление обмотки соленоида равно R .



1.2 Запишите уравнение, описывающее скорость изменения силы тока в цепи со временем $\frac{\Delta I}{\Delta t}$.

1.3 Нарисуйте схематический график зависимости силы тока в цепи от времени. 1.4 Определите максимальное значение силы тока в цепи $I_{\max}$. 1.5 Оцените время установления тока в цепи τ (время за которое сила тока в цепи достигнет постоянного значения).

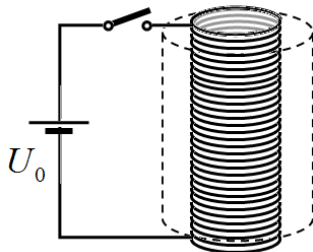
1.6 Найдите закон изменения силы тока в обмотке при замыкании ключа, если обмотка соленоида находится сверхпроводящем состоянии.

Часть 2. Соленоид в трубке.

Соленоид помещают внутрь алюминиевой трубки, радиус которой r_1 ($r_1 > r_0$). Длина трубки равна длине соленоида. Толщина стенок трубки равна h и значительно меньше ее радиуса. Оси соленоида и трубки совпадают.

Удельное электрическое сопротивление алюминия (из которого сделана трубка) равно ρ . Индуктивностью трубки в данной части следует пренебречь (т.е. можно пренебречь магнитным полем, создаваемым током, возникающим в стенках трубки).

Соленоид, находящийся в сверхпроводящем состоянии, подключают к источнику и замыкают ключ.



2.1 Определите силу тока I_1 , возникающего в стенках трубки. Укажите направление протекания этого тока. 2.2 Рассчитайте мощность P_0 , развиваемую источником тока. Укажите, в

какой вид энергии преобразуется энергия, передаваемая источником в цепь 2.3 Определите мощность теплоты P_h , выделяющейся в стенках трубки. 2.4 Укажите источник энергии, благодаря которому трубка нагревается.

Часть 3. Передача энергии.

В этой части Вам необходимо показать, как и откуда поступает энергия в стенки трубки.

Подсказка. Следует принять во внимание магнитное поле, создаваемое электрическим током в трубке.

Обмотку соленоида (с сопротивлением R) подключают к источнику, как показано на рисунке в Части 2, и замыкают ключ.

3.1 На одном рисунке (с катушкой в трубке) укажите направления тока в обмотке I_0 , направление вектора индукции магнитного поля $\vec{B}_0$, создаваемого током в обмотке соленоида; направление тока I_1 в стенках трубки, направление вектора индукции магнитного поля $\vec{B}_1$, создаваемого током в стенках трубки. 3.2 Выразите индукцию магнитного поля B_1 , создаваемого током в стенках трубки, через силу тока в ее стенках I_1 . 3.3 Запишите систему уравнений, описывающих скорости изменения сил токов в обмотке соленоида $\frac{\Delta I_0}{\Delta t}$ и стенках трубки $\frac{\Delta I_1}{\Delta t}$. В эти уравнения помимо параметров установки должны входить только силы токов. 3.4 Получите формулу для мощности, развиваемой источником тока. Укажите, какое слагаемое описывает мощность теплоты, выделяющейся в стенках трубки. Укажите физический смысл остальных слагаемых, входящих в эту формулу.

Решение

Задание 11-2. Магнетизм и теплота.

Часть 1. Основные понятия.

1.1 Индуктивность соленоида может быть найдена из формулы для ЭДС самоиндукции. С одной стороны, модуль ЭДС самоиндукции определяется как

$$\varepsilon_{si} = L \frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad (1)$$

С другой стороны, эта величина может быть выражена с помощью закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_{in} = N \left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right) = N \left(S \frac{\Delta B}{\Delta t} \right) = N \left(S \frac{\Delta \mu_0 n I}{\Delta t} \right) = \mu_0 n^2 \pi r_0^2 l \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (2)$$

Сравнивая эти два выражения, получаем формулу для индуктивности соленоида

$$L = \mu_0 n^2 \pi r_0^2 l \quad (3)$$

1.2 Требуемое уравнение следует из закона Ома для полной цепи:

$$U_0 + \varepsilon_{si} = IR \quad (4)$$

Используя формулу (1) с учетом правила Ленца, запишем

$$U_0 - L \frac{\Delta I}{\Delta t} = IR. \quad (5)$$

Из этого уравнения следует требуемое выражение:

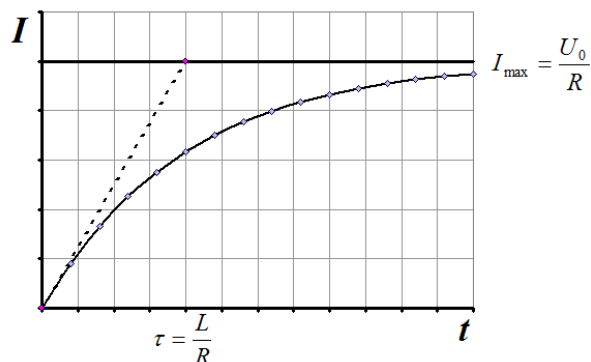
$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{R}{L} \left(\frac{U_0}{R} - I \right). \quad (6)$$

1.3 – 1.5 Схематический график зависимости силы тока от времени показан на рисунке. Сила тока монотонно возрастает от нуля до максимального значения

$$I_{\max} = \frac{U_0}{R}. \quad (7)$$

С характерным временем

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (8)$$



1.6 Если сопротивление цепи равно нулю, то из уравнения (4)

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{U_0}{L}. \quad (9)$$

Следует, что сила тока будет возрастать по линейному закону

$$I = \frac{U_0}{L}t. \quad (10)$$

Теоретический тур. Вариант 1. 11 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 5

Часть 2. Соленоид в трубке.

2.1 При изменении тока в обмотке соленоида изменяется и магнитное поле, создаваемое им. Изменяющееся магнитное поле, создает вихревое электрическое поле, описываемое законом электромагнитной индукции. Часто утверждают, что магнитное поле соленоида локализуется только внутри соленоида. Однако оно существует во всем пространстве, в том числе и вне его. Поэтому вихревое электрическое поле возникает и в области расположения трубки. Однако, при расчете магнитного потока через поперечное сечение трубки можно учитывать только магнитное поле внутри соленоида. Направление токов в обмотке и в стенках трубки показано на рисунке. При определении направления индукционного тока учтено сила тока в обмотке возрастает. Так как в данной части рекомендуется пренебречь магнитным полем тока в трубке, то закон изменения силы тока в обмотке будет описываться формулой (10) ЭДС индукции, возникающей в стенках трубки равна

$$\varepsilon_1 = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{L}{N} \frac{\Delta I_0}{\Delta t} = -\frac{U_0}{N}. \quad (11)$$

Так как ток протекает перпендикулярно оси трубки, то ее электрическое сопротивление равно

$$R_1 = \rho \frac{2\pi r_1}{lh}. \quad (12)$$

В соответствии с законом Ома сила тока в стенках трубки равна

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1} = \frac{U_0}{\rho \frac{2\pi r_1}{lh}} = \frac{lh}{2\pi r \rho} \frac{U_0}{N}. \quad (13)$$

2.2 Мощность, развиваемая источником, равна

$$P_0 = U_0 I_0 = \frac{U_0^2}{L} t. \quad (14)$$

Не сложно показать, что эта энергия идет на создание магнитного поля внутри соленоида. Из уравнения (9) выразим:

$$U_0 = L \frac{\Delta I_0}{\Delta t}. \quad (15)$$

Умножим данное уравнение на силу тока в цепи источника и преобразуем полученное уравнение:

$$P_0 = U_0 I_0 = L I_0 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{L I_0^2}{2} \right). \quad (16)$$

Физическая интерпретация данного выражения очевидна: энергия источника идет на увеличение магнитного поля внутри соленоида.

Теоретический тур. Вариант 1. 11 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 6

Дополнение (не требуется). Для наглядного доказательства последнего утверждения преобразуем выражение, стоящее в скобках:

$$\frac{L I_0^2}{2} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi r_0^2 l I_0^2 = \frac{(\mu_0 n I_0)^2}{2 \mu_0} V$$

Видим, что действительно, эта величина есть энергия магнитного поля внутри соленоида.

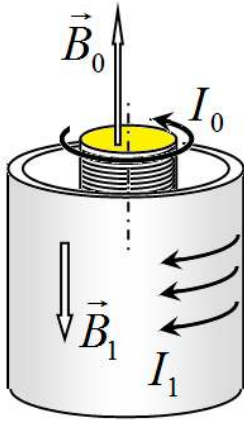
2.3 Мощность теплоты, выделяющейся в трубке, вычисляется по закону Джоуля – Ленца:

$$P_h = I_1^2 R_1 = \frac{U_0^2}{N^2 R_1} = \frac{lh}{2\pi r \rho N^2} U_0^2.$$

2.4 Полученные выражения приводят к парадоксу: откуда появляется энергия, выделяющаяся в виде теплоты не понятно! Понятно, что единственный источник энергии в данной системе – это источник тока. Для разрешения парадокса необходимо решить следующую часть задачи.

Часть 3. Передача энергии.

3.1 На рисунке показано направление вектора индукции $\vec{B}_1$ магнитного поля, создаваемого током в стенках трубки.



3.2 Для определения индукции поля $\vec{B}_1$ обратимся к формуле (1), приведенной в условии задачи

$$B = \mu_0 n I$$

Обратим внимание, что nI имеет смысл силы тока, протекающего через единицы длины соленоида. Аналогом этой величины для стенок трубки является величина $\frac{I_1}{l}$. Следовательно, индукция поля, создаваемого этим током, равна

$$B_1 = \frac{\mu_0}{l} I_1.$$

3.3 Отметим, что даже в случае сверхпроводящего соленоида сила тока в его обмотке будет изменяться по иному закону, отличному от линейного. Поэтому сила тока в стенках трубки не будет постоянной. Чтобы учесть влияние магнитного поля, создаваемого электрическим током в стенках трубки, в уравнениях для сил токов необходимо учесть ЭДС индукции, возникающих при изменении, как полем тока соленоида, так и полем тока трубки. Положительным направлением силы тока будем считать направление тока в обмотке соленоида, тогда положительным направлением вектора индукции будет направление вектора индукции $\vec{B}_0$.

Запишем выражения для всех ЭДС.

ЭДС самоиндукции, создаваемой магнитным полем тока I_0 в обмотке соленоида:

$$\varepsilon_{00} = -L \frac{\Delta I_0}{\Delta t} = -\mu_0 n^2 \pi r_0^2 l \frac{\Delta I_0}{\Delta t}$$

Теоретический тур. Вариант 1. 11 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 7

ЭДС индукции в стенках трубки, создаваемой током в обмотке I_0 :

$$\varepsilon_{10} = -\pi r_0^2 \mu_0 n \frac{\Delta I_0}{\Delta t} = -\mu_0 n \pi r_0^2 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} = L_{10} \frac{\Delta I_0}{\Delta t} \quad (20)$$

ЭДС индукции в обмотке соленоида, создаваемой током в трубке

$$\varepsilon_{01} = -N \frac{\Delta \Phi_1}{\Delta t} = -N \pi r_0^2 \frac{\Delta B_1}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 \pi r_0^2 N}{l} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -\mu_0 \pi r_0^2 n \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -L_{01} \frac{\Delta I_1}{\Delta t}. \quad (21)$$

В этих формулах обозначено $L_{01} = L_{10} = \mu_0 \pi r_0^2 n$ коэффициент взаимной индукции. ЭДС самоиндукции в стенках трубки, создаваемой током в той же трубке

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t_1} = -\pi r_1^2 \frac{\Delta B_1}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 \pi r_1^2}{l} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t}. \quad (21)$$

Здесь обозначено $\frac{\mu_0 \pi r_1^2}{l} = L_1$ - индуктивность трубки. Теперь на основании закона Ома запишем уравнения для сил токов. Для силы тока в обмотке соленоида:

$$\begin{aligned} U_0 + \varepsilon_{00} + \varepsilon_{01} &= I_0 R \Rightarrow \\ U_0 - L \frac{\Delta I_0}{\Delta t} - L_{01} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} &= I_0 R. \end{aligned} \quad (22)$$

Для силы тока в стенках трубки

$$\begin{aligned} \varepsilon_{10} + \varepsilon_{11} &= I_1 R_1 \Rightarrow \\ -L_{10} \frac{\Delta I_0}{\Delta t} - L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} &= I_1 R_1. \end{aligned} \quad (23)$$

Запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} U_0 = L \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + L_{01} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + I_0 R \\ 0 = L_{10} \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + I_1 R_1 \end{cases}. \quad (24)$$

3.4 Умножим первое уравнение этой системы на I_0 , второе – на I_1 :

$$\begin{cases} U_0 I_0 = L I_0 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + L_{01} I_0 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + I_0^2 R \\ 0 = L_{10} I_1 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + L_1 I_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + I_1^2 R_1 \end{cases}$$

и просуммируем их, получим выражение для мощности, развиваемой источником:

$$U_0 I_0 = \left(L I_0 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + L_{01} I_0 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + L_{10} I_1 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + L_1 I_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \right) + I_0^2 R + I_1^2 R_1. \quad (25)$$

Можно показать, что выражение в скобках есть скорость изменения энергии магнитного поля, второе слагаемое – мощность теплоты, выделяющейся в обмотке соленоида, последнее слагаемое – мощность теплоты, выделяющейся в стенках трубки. Таким образом, энергия, выделяющаяся в трубке, передается от источника посредством изменяющегося магнитного поля.

Теоретический тур. Вариант 1. 11 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 8

Дополнение (не требуется). Для доказательства того, что выражение в скобках действительно есть скорость изменения энергии магнитного поля, преобразуем его к виду:

$$L I_0 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + L I_0 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + L I_1 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + L_1 I_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \Delta \left(\frac{L I_0^2}{2} + L_{01} I_0 I_1 + \frac{L_1 I_1^2}{2} \right). \quad (26)$$

Теперь выразим каждое слагаемое через индукции полей. Для этого сначала выразим силы токов через соответствующие индукции:

$$I_0 = \frac{B_0}{\mu_0 n}, \quad I_1 = \frac{l}{\mu_0} B_1. \quad (27)$$

Возвращаясь к формуле (26), записываем:

$$\begin{aligned}
LI_0^2 &= \mu_0 n^2 \pi r_0^2 l \left(\frac{B_0}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0} \pi r_0^2 l \\
L_1 I_1^2 &= \frac{\mu_0}{l} \pi r_1^2 \left(\frac{l}{\mu_0} B_1 \right)^2 = \frac{B_1^2}{\mu_0} \pi r_1^2 l \\
L_{01} I_0 I_1 &= \mu_0 \pi r_0^2 n \frac{B_0}{\mu_0 n} \frac{l}{\mu_0} B_1 = \frac{B_0 B_1}{\mu_0} \pi r_0^2 l
\end{aligned} \tag{28}$$

Подставляя в рассматриваемое выражение (26), окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{LI_0^2}{2} + L_{01} I_0 I_1 + \frac{L_1 I_1^2}{2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{B_0^2}{\mu_0} \pi r_0^2 l + 2 \frac{B_0 B_1}{\mu_0} \pi r_0^2 l + \frac{B_1^2}{\mu_0} \pi r_0^2 l + \frac{B_1^2}{\mu_0} \pi (r_1^2 - r_0^2) l \right) \\
&= \frac{(B_0 + B_1)^2}{2\mu_0} \pi r_0^2 l + \frac{B_1^2}{2\mu_0} \pi (r_1^2 - r_0^2) l
\end{aligned} \tag{29}$$

Теперь совершенно очевидно, что первое слагаемое – энергия поля внутри соленоида, второе слагаемое – энергия поля между трубкой и соленоидом.

Теоретический тур. Вариант 1. 11 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 9

