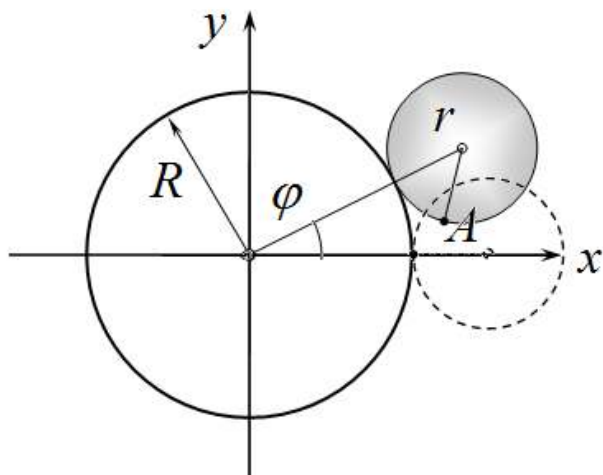


Условие

Задание 10-1. Двойное вращение.

Колесо радиуса r катится без проскальзывания по боковой поверхности диска (снаружи его). Центр колеса движется вокруг центра диска с постоянной угловой скоростью ω . Положение центра колеса определяется углом φ . Точка A находится на ободе колеса. В момент времени $t = 0$ точка A касается поверхности диска в точке, находящейся на оси x (при этом $\varphi = 0$)



1. Выведите закон движения точки A , т.е. зависимости ее координат от времени $x(t)$, $y(t)$.
2. Найдите максимальную по модулю скорость точки A - $v_{\max}$.
3. Постройте примерные траектории движения точки A , в трех случаях: а) $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$; б) $\frac{r}{R} = 1$; в) $\frac{r}{R} = 2$.

Построения выполните на бланках в листах ответов. На этих бланках нарисованы две окружности: радиус меньшей из них равен R , радиус большей равен $R + 2r$.

Решение

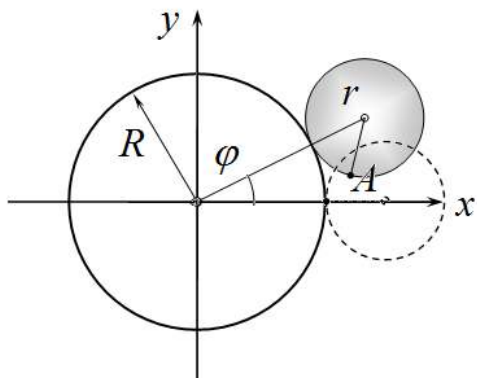
Задание 10-1. Двойное вращение. Решение.

1. Относительно центра колеса точка A поворачивается на угол α , который можно найти из условия

$$R\varphi = r\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{R}{r}\varphi. \quad (1)$$

Тогда, как следует из рисунка, координаты точки A (с учетом $\varphi = \omega t$) описываются функциями

$$\begin{aligned} x(t) &= (R+r) \cos \omega t - r \cos \left(\frac{R}{r} + 1 \right) \omega t \\ y(t) &= (R+r) \sin \omega t - r \sin \left(\frac{R}{r} + 1 \right) \omega t \end{aligned} \quad (2)$$

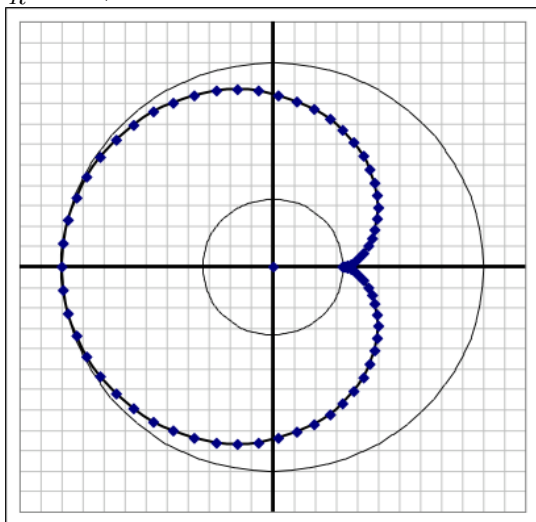


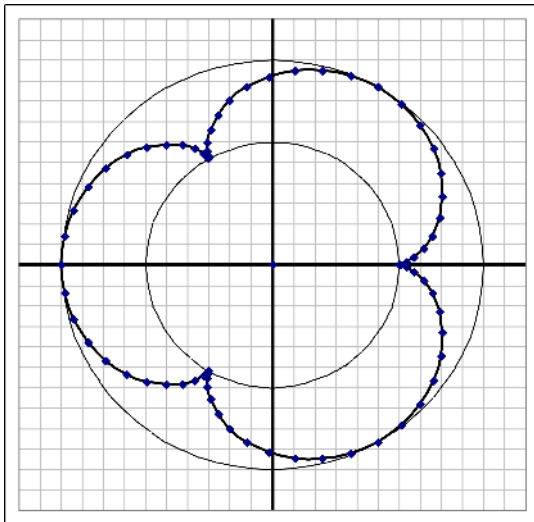
2. Скорость точки максимальна, когда она находится на максимальном удалении от центра диска. В эти моменты времени скорость центра $\omega(R+r)$ и скорость точки относительно центра колеса $(\frac{R}{r} + 1) \omega r = (R+r)\omega$ совпадают, поэтому полная скорость точки A будет равна

$$v_{\max} = 2(R+r)\omega. \quad (3)$$

Этот же результат можно получить, рассматривая точку касания как мгновенный центр вращения.

3. Схематические траектории можно построить, если последовательно находить точки касания и точки максимального удаления от диска. Ниже показаны эти траектории. А) $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$ б) $\frac{r}{R} = 1$ (эта кривая называется кардиоидой)





В) $\frac{r}{R} = 2$ Здесь колесо делает два оборота между последовательными касаниями.

