

Кардиограмма

Условие

Задание 11-1. «Кардиограмма» тепловой машины.



В данном задании рассматривается тепловая машина. Помимо традиционных вопросов, в нем рассматриваются временные характеристики данной машины.

Рабочим телом двигателя является одноатомный идеальный газ, который находится в цилиндрическом сосуде под поршнем. В начальном состоянии параметры этого газа известны и равны: объем - V_0 , давление - P_0 , температура - T_0 . При решении задач используются относительные единицы – отношения объема, давления и температуры к соответствующим величинам в начальном состоянии:

$$v = \frac{V}{V_0}, \quad p = \frac{P}{P_0}, \quad \tau = \frac{T}{T_0}. \quad (1)$$

Цикл тепловой машины состоит из 5 этапов, длительность каждого из них равна t_0 . Эту величину можно использовать в качестве единицы времени.

Величины P_0, V_0, T_0, t_0 заданы в единицах системы СИ.

В Листах ответов приведены графики зависимостей объема и температуры газа от времени. Для упрощения вашей работы значения параметров в некоторые моменты времени приведены в Таблице 1. На каждом этапе поршень движется с постоянным ускорением (которое может изменяться при переходе от одного этапа к другому).

Часть 1. Динамика цикла.

1.1 Используя данные Таблицы 1, рассчитайте значения давления $p = \frac{P}{P_0}$, в моменты времени, указанные в этой таблице.

Приведите формулу, по которой проводится расчет давления, численные результаты расчетов занесите в последний столбец Таблицы 1.

Так как поршень движется в цилиндрическом сосуде, то его координата пропорциональна объему газа под поршнем.

1.2 Для каждого этапа цикла запишите закон движения поршня (зависимость объема $v = \frac{V}{V_0}$ от времени) - $v(t)$ и зависимости давления от времени $p(t)$.

Приведите формулы, по которым вы провели расчеты. Окончательные выражения с численными коэффициентами приведите в Таблице 2 листа ответов.

1.3 На бланке в листе ответов постройте график зависимости давления газа $p = \frac{P}{P_0}$ от времени.

1.4 Найдите максимальную мгновенную мощность двигателя $w_{\max}$, укажите момент времени t^* , в который достигается эта мощность. Ответы приведите в единицах системы СИ.

Часть 2. Термодинамика цикла.

2.1 На бланке в листе ответов постройте диаграмму цикла в координатах (p, v) .

2.2 Для каждого этапа цикла рассчитайте: изменение внутренней энергии газа ΔU , совершенную газом работу A , количество полученной теплоты Q . Указанные величины можно выразить в относительных единицах.

Приведите формулы для расчетов указанных величин, результаты расчетов для каждого этапа приведите в Таблице 3.

2.3 Рассчитайте КПД цикла.

2.4 Найдите среднюю за цикл мощность, развиваемую данной тепловой машиной. Ответ приведите в единицах системы СИ.

Решение

Задание 11-1. «Кардиограмма» тепловой машины. (Решение).

Часть 1. Динамика цикла.

1.1 Из уравнения состояния идеального газа

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_0 V_0}{T_0} \quad (1)$$

Следует, что в относительных единицах соотношение для параметров газа имеет вид

$$\frac{pv}{\tau} = 1. \quad (2)$$

Поэтому значения давлений газа рассчитываются по формуле

$$p = \frac{\tau}{v}. \quad (3)$$

Результаты расчетов приведены в Таблице 2.

Таблица 2. Значения объема и температуры.

t/t_0	V/V_0	T/T_0	P/P_0
0,00	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,50	1,50
1,00	1,00	2,00	2,00
1,50	1,25	2,81	2,25
2,00	2,00	6,00	3,00
2,50	2,75	8,25	3,00
3,00	3,00	9,00	3,00
3,50	2,75	7,56	2,75
4,00	2,00	4,00	2,00
4,50	1,25	1,56	1,25
5,00	1,00	1,00	1,00

1.2 В условии задачи оговорено, что на каждом этапе цикла поршень движется с постоянным ускорением. Поэтому зависимость объема от времени описывается функцией

$$v = v_{k,0} + u_k(t - t_{k,0}) + \frac{a_k(t - t_{k,0})^2}{2}. \quad (4)$$

На каждом этапе в таблице 1 приведены значения объемов в трех точках $v_{k,0}$ в начале этапа $t_{k,0}$; $v_{k,1/2}$ в середине этапа $t_{k,0} + 1/2$; $v_{k,1}$ в конце этапа $t_{k,0} + 1$. Для этих моментов времени можно записать уравнения, следующие из формулы (4):

$$v_{k,1/2} = v_{k,0} + \frac{1}{2}u_k + \frac{a_k(1/2)^2}{2}. \quad (5)$$

$$v_{k,1} = v_{k,0} + u_k + \frac{a_k}{2}$$

Это система уравнений, из которой легко найти значения начальной скорости u_k и ускорения a_k на каждом этапе цикла. Результаты расчетов для функций $v(t)$ приведены в соответствующем столбце Таблицы 2.

Таблица 2. Функции зависимостей объема и давления от времени.

Интервал времени		$v(t)$	$p(t)$
Начало этапа $\frac{t}{t_0}$	Конец этапа $\frac{t}{t_0}$		
0	1	$v = 1$	$p = 1 + t$
1	2	$v = 1 + (t - 1)^2$	$p = 2 + (t - 1)^2$
2	3	$v = 2 + 2(t - 2) - (t - 2)^2$	$p = 3$
3	4	$v = 3 - (t - 3)^2$	$p = 3 - (t - 3)^2$
4	5	$v = 2 - 2(t - 4) + (t - 4)^2$	$p = 2 - 2(t - 4) + (t - 4)^2$

Для расчета зависимости давления от температуры можно поступить аналогично. Но нет гарантии, что на всех этапах эта зависимость описывается квадратичной функцией. Кроме того, для дальнейшего решения важно увидеть зависимость между давлением и температурой. Поэтому имеет смысл проанализировать каждый этап отдельно. **Этап 0-1.** Объем остается постоянным (процесс изохорный при $v = 1$), поэтому $p = \tau$. Из таблицы 1 следует, что зависимость давления от времени линейна. **Этап 1-2.** Из таблицы 1 следует, что на данном этапе $p = v + 1$. **Этап 2-3.** Давление постоянно, т.е. процесс изохорный. **Этапы 3-4 и 4-5.** Видно, что на этих участках $p = v$.

1.3 График зависимости давления от времени показан на рисунке.



1.4 Мощность двигателя равна произведению давления газа на скорость изменения объема поршня

$$w = P \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (6)$$

Из графика зависимости объема от времени следует, что максимальная скорость изменения объема достигается в момент времени $t = 2$, т.к. в этот момент времени максимален коэффициент наклона касательной. Численное значение максимальной скорости изменения можно найти из формул для зависимости объема от температуры, приведенных в таблице 2:

$$\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{\max} = 2. \quad (7)$$

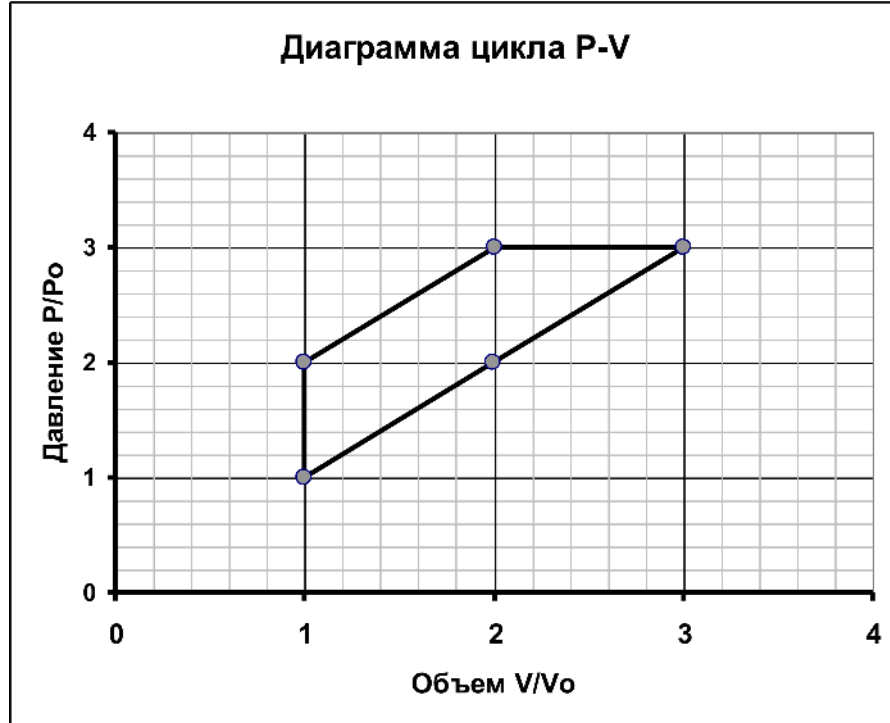
В этот же момент времени давление также максимально и равно $p = 3$. Следовательно, в единицах системы СИ максимальная мощность равна

$$w_{\max} = \left(P \frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{\max} = P_0 p_{\max} \frac{V_0}{t_0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t'}\right)_{\max} = 6 \frac{P_0 V_0}{t_0} \quad (8)$$

И достигается в момент времени

$$t^* = 2t_0. \quad (9)$$

Часть 2. Термодинамика цикла.



2.1 На основании анализа, проведенного в п. 1.2, диаграмма цикла имеет вид, показанный на рисунке.

2.2 Изменение внутренней энергии одноатомного газа определяется формулой

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} \Delta(PV) = \frac{3}{2} P_0 V_0 \Delta(pv) = \frac{3}{2} P_0 V_0 \Delta \tau \quad (10)$$

Работа, совершенная газом, может быть рассчитана как площадь под графиком зависимости давления от объема. Для малого участка изменения объема эта работа равна

$$\delta A = P \Delta V = P_0 V_0 p \Delta v. \quad (11)$$

По первому закону термодинамики количество полученной теплоты равно сумме

$$\delta Q = \Delta U + \delta A. \quad (12)$$

Как следует из этих формул, все эти величины пропорциональны произведению $P_0 V_0$, которое выступает в качестве единицы энергии в относительных единицах, принятых в этой задаче. Результаты расчетов по формулам (10) - (12) приведены в таблице 4.

Таблица 3. Термодинамические характеристики.

Интервал времени		Характеристики этапов		
Начало этапа $\frac{t}{t_0}$	Конец этапа $\frac{t}{t_0}$	Изменение энергии ΔU	Совершенная работа A	Полученная теплота Q
0	1	1,50	0,00	1,50
1	2	6,00	2,50	8,50
2	3	4,50	3,00	7,50
3	4	-7,50	-2,50	-10,00
4	5	-4,50	-1,50	-6,00
	Суммы	0	1,5	17,5

В последней ячейке приведена сумма теплот, полученных газом, т.е. только сумма положительных величин в столбце теплот.

2.3 По определению КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{1,5}{17,5} \approx 0,086 = 8,6\%. \quad (13)$$

2.4 Средняя мощность за цикл равна отношению совершенной за цикл работы к длительности цикла

$$\langle w \rangle = \frac{A}{t} = \frac{1,5 P_0 V_0}{5 t_0} = 0,30 \frac{P_0 V_0}{t_0}, \quad (14)$$

Что в 20 раз меньше максимальной мгновенной мощности.