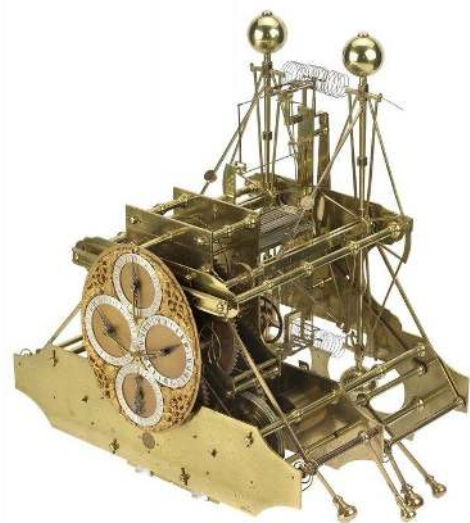


Условие

Задание 11-3. Морской хронометр.



Первые попытки создать морской хронометр, работающий независимо от качки и прочих факторов, были предприняты в конце XVII века. Известны разработки Христиана Гюйгенса, Уильяма Дерема и других учёных. Но в уже упомянутом 1714 году Комиссия долгот учредила приз в 10 000 фунтов, впоследствии сумму подняли до 20 000 фунтов. Эта сумма сейчас превышает 2 миллиона фунтов стерлингов!

Преуспел в итоге английский часовщик-самоучка Джон Гаррисон. Они с братом Джеймсом были специалистами по «часовым шкафам», большим напольным часам с длинными маятниками. За разработку Гаррисон взялся в 1730 году в возрасте 37 лет, и свой первый морской хронометр продемонстрировал в 1736-м.

На фото показана точная модель хронометра Гаррисона, хранящаяся в музее Гринвичской лаборатории.

В данном задании вам необходимо проанализировать колебательную систему этого устройства. На рис. 1 показана упрощенная схема маятниковой системы, которая состоит из двух одинаковых вертикальных маятников. Каждый из них состоит из жесткого стержня длины l (массой стержня можно пренебречь), который может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси O , на противоположном конце стержня закреплен массивный шар массы m (его можно считать материальной точкой). Маятники соединены пружиной жесткости k (массой пружины также можно пренебречь), которая прикреплена к стержням на середине их длины. Пружина «работает» только на растяжение: при растяжении пружины возникает сила упругости, подчиняющаяся закону Гука; при сжатии пружины силы упругости отталкивания не возникает, пружина просто провисает. При анализе возможных режимов движения маятников удобно использовать безразмерный параметр

$$\gamma = \frac{2mg}{kl}, \quad (1)$$

где g - ускорение свободного падения. Этот параметр легко изменять, изменяя массу шаров.

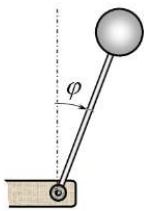


Рис. 3

Будем рассматривать случай, когда оба маятника колеблются симметрично (рис.2). Положение стержня будем характеризовать углом отклонения стержня от вертикали φ (рис. 3).

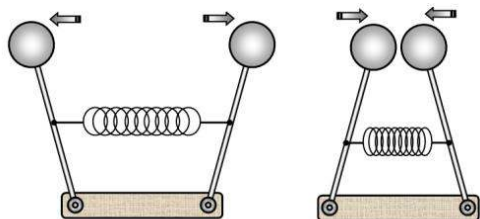


Рис. 2

В первой попытке создания хронометра длина пружины в недеформированном состоянии в точности равнялась расстоянию между стержнями a в вертикальном положении (см. рис. 1).

1. Запишите зависимость потенциальной энергии системы от угла отклонения стержней $U(\varphi)$, полагая, что при $\varphi = 0$ $U = 0$. Постройте схематические графики этой зависимости при двух значениях параметра γ а) $\gamma < 1$; б) $\gamma > 1$. 2. Покажите, что колебания стержней в этом случае, невозможны ни при каких значениях параметра γ .

Для того, чтобы стержни могли колебаться изобретатели предложили использовать удлиненную пружину. В этом случае пружина оказывается недеформированной при симметричном отклонении стержней на угол φ_0 .

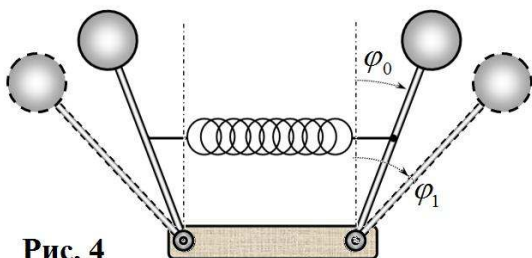


Рис. 4

3. Запишите уравнение, для определения положений равновесия стержней. 4. Найдите, при каких значениях параметра γ , существуют положения равновесия стержней. 5. Укажите, вблизи какого положения равновесия возможны колебания.

Пусть $\varphi_0 = 10^\circ$; $\gamma = 0,30$.

6. Найдите значение угла φ_1 , при котором стержни могут находиться в положении равновесия.

7. Получите формулу для периода малых колебаний стержней вблизи положения равновесия φ_1 . 8. Чему равна максимально возможная амплитуда колебаний в этом случае.

Подсказка. Для углов меньших 20° можно считать, что

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}. \quad (2)$$

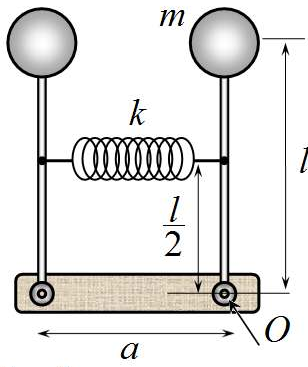


Рис. 1

Решение

Задание 11-3. Морской хронометр. (Решение).

1. При отклонении стержня на угол φ шарики опускаются на расстояние $l(1 - \cos \varphi)$, поэтому изменение потенциальной энергии в поле тяжести равно

$$\Delta U = 2mgl(1 - \cos \varphi) \quad (1)$$

Удлинение пружины оказывается равным

$$\Delta x = 2|BD| = 2 \cdot \frac{l}{2} \sin \varphi = l \sin \varphi. \quad (2)$$

Следовательно, потенциальная энергия пружины при ее растяжении ($\varphi > 0$) описывается функцией

$$U_{\text{упр.}} = \frac{k}{2}(l \sin \varphi)^2 \quad (3)$$

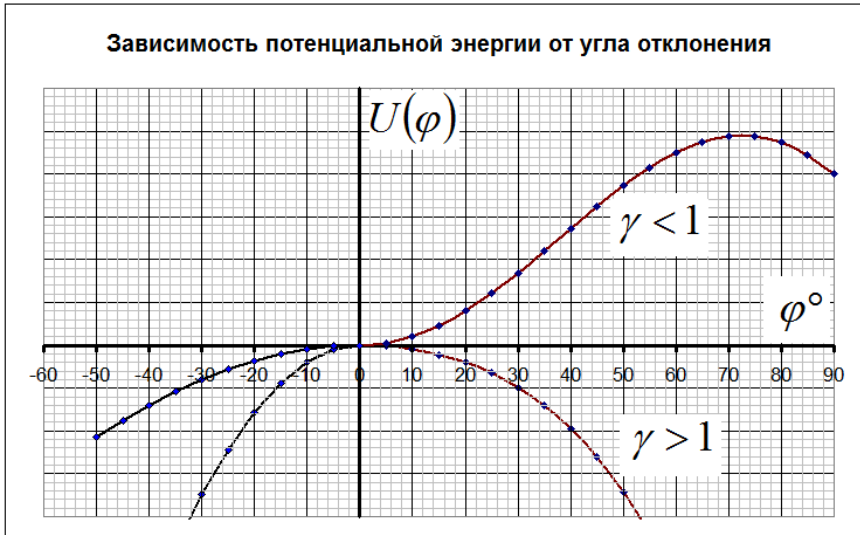
При сжатии пружины ($\varphi < 0$) потенциальная энергия пружины равна нулю. Таким образом, зависимость потенциальной энергии системы от угла отклонения имеет вид:

$$U(\varphi) = \begin{cases} 2mgl(1 - \cos \varphi) + \frac{k}{2}(l \sin \varphi)^2, & \varphi > 0 \\ 2mgl(1 - \cos \varphi), & \varphi < 0 \end{cases} \quad (4)$$

Для удобства дальнейшего анализа этой функции, воспользуемся рекомендацией, данной в условии, для чего используем параметр γ . Для этого разделим выражение (4) на $\frac{kl^2}{2}$:

$$2 \frac{U(\varphi)}{kl^2} = u(\varphi) = \begin{cases} 2\gamma(1 - \cos \varphi) + \sin^2 \varphi, & \varphi > 0 \\ 2\gamma(1 - \cos \varphi), & \varphi < 0 \end{cases} \quad (5)$$

Анализ этих графиков можно проводить различными способами: - подсчитать значения функции численно; - заметить, что данная функция является квадратичной функцией от $\cos \varphi$, т.к. $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$; - найти точки экстремумов и значения функции в крайних точках.



Результаты такого анализа показаны на рисунке.

2. Для того, чтобы в системе были возможны колебания, необходимо, чтобы существовала точка минимума потенциальной энергии. Вертикальное положение стержня ($\varphi = 0$) является положением равновесия, но оно неустойчиво. При отклонении в отрицательную сторону стержень падает. Что очевидно: пружина не может его отталкивать!

При $\gamma < 1$ Существует еще одно положение равновесия, но оно также неустойчиво. Это можно показать, если рассмотреть моменты сил, действующих на вертикальный маятник. Положению равновесия соответствует равенство модулей моментов силы тяжести $mgl \sin \varphi$ и силы упругости $(kl \sin \varphi) \cdot (\frac{l}{2} \cos \varphi) = \frac{kl^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi$:

$$mgl \sin \varphi = \frac{kl^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi \quad (6)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\gamma \sin \varphi = \sin \varphi \cos \varphi \quad (7)$$

Из которого следует, что при $\gamma < 1$, существует положение равновесия $\cos \varphi = \gamma$, помимо вертикального положения $\varphi = 0$. Но как было отмечено ранее – это положение равновесия является неустойчивым, поэтому колебания возле него невозможны.

3. Если длина пружины больше расстояния между стержнями, то удлинение пружины будет равно

$$\Delta x = 2 \frac{l}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0). \quad (8)$$

Поэтому уравнение равновесия (7) примет вид

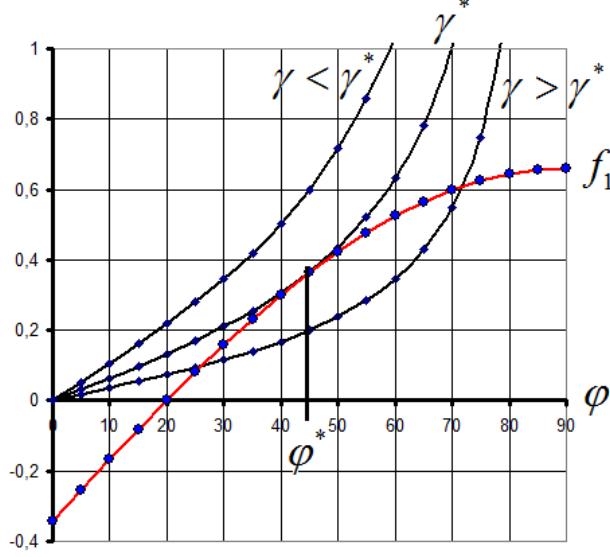
$$\gamma \sin \varphi = (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \cos \varphi \quad (9)$$

4. Итак, положения равновесия существуют, если это уравнение имеет корни! Решить это уравнение аналитически затруднительно, поэтому поставим более простую задачу: найти условия, при которых корни существуют в интервале $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Перепишем уравнение в более простой форме

$$\gamma \operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi - \sin \varphi_0 \quad (10)$$

Легко построить схематический график функции $f_1 = \sin \varphi - \sin \varphi_0$ и несколько графиков функции $f_2 = \gamma \operatorname{tg} \varphi$ при нескольких возрастающих значениях параметра γ . При $\gamma = 0$ уравнение (10) имеет очевидный корень $\varphi = \varphi_0$; при увеличении параметра γ тангенсоида приподнимается, но пересекает график функции f_1 ; при некотором критическом значении γ^* эти функции



касаются друг друга; наконец, при $\gamma > \gamma^*$ уравнение (10) корней не имеет. Для расчета критического значения γ^* нужно записать условия касания двух функций: в точке касания функции равны между собой, также равны их производные (для упрощения опустим знак «звездочки»):

$$\begin{aligned} \gamma \operatorname{tg} \varphi &= \sin \varphi - \sin \varphi_0 \\ \frac{\gamma}{\cos^2 \varphi} &= \cos \varphi \end{aligned} \quad (10)$$

Из второго уравнения находим, что $\gamma = \cos^3 \varphi$, подставляя в первое уравнение, после несложных преобразований получим,

$$\begin{aligned} \cos^3 \varphi \operatorname{tg} \varphi &= \sin \varphi - \sin \varphi_0 \Rightarrow \\ \cos^2 \varphi \sin \varphi &= \sin \varphi - \sin \varphi_0 \Rightarrow \\ \sin \varphi - \cos^2 \varphi \sin \varphi &= \sin \varphi_0 \Rightarrow \\ \sin^3 \varphi &= \sin \varphi_0 \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, точка касания задается условием

$$\sin \varphi^* = \sqrt[3]{\sin \varphi_0}. \quad (12)$$

Тогда критическое значение параметра равно

$$\gamma^* = \cos^3 \varphi^* = (1 - \sin^2 \varphi^*)^{3/2} = \left(1 - (\sin \varphi_0)^{2/3}\right)^{3/2}. \quad (13)$$

Таким образом, колебания маятников возможны при

$$0 < \gamma < \left(1 - (\sin \varphi_0)^{2/3}\right)^{3/2}. \quad (14)$$

Отметим, что при $\gamma = 0$ масса шаров равна нулю, поэтому колебания невозможны.

5. Легко показать, что положению устойчивого равновесия соответствует меньший корень уравнения (10), поэтому вблизи этого положения возможны колебания стержней.

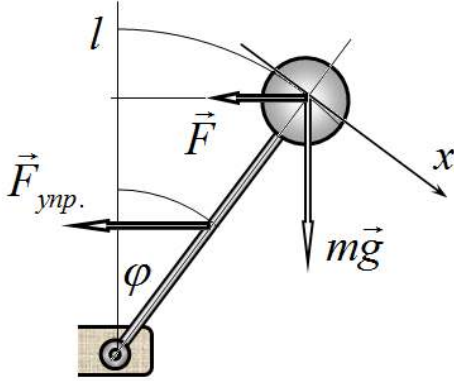
6. При заданном значении $\varphi_0 = 10^\circ$ можно использовать приближенные формулы для тригонометрических функций в этом случае уравнение (9) линейризуется

$$\gamma\varphi = (\varphi - \varphi_0). \quad (15)$$

Решение которого находится элементарно:

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{1 - \gamma} \approx 14^\circ. \quad (16)$$

7. Рассмотрим силы, действующие на шарик: это сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{F}$, действующая со стороны стержня. Так масса стержня пренебрежимо мала, то сумма моментов сил, действующих на стержень, равна нулю. Следовательно, со стороны шарика на стержень действует сила в 2 раза меньшая силы упругости и направленная противоположно ей. Поэтому на шарик (третий закон Ньютона!) действует сила в 2 раза меньшая силы упругости и сонаправленная с ней.



В проекции на ось x , касательную к траектории, уравнение второго закона Ньютона имеет вид:

$$ma = mg \sin \varphi - \frac{kl(\sin \varphi - \sin \varphi_0)}{2} \cos \varphi. \quad (17)$$

Полагая углы малыми, получим уравнение

$$ma = mg\varphi - \frac{kl(\varphi - \varphi_0)}{2} = -\frac{kl}{2} \left(1 - \frac{2mg}{kl}\right) \varphi + \frac{kl\varphi_0}{2} = -\frac{kl}{2}(1 - \gamma)\frac{x}{l} + \frac{kl\varphi_0}{2}, \quad (18)$$

Которое является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k(1 - \gamma)}}. \quad (19)$$

8. Колебания возможны, если маятник не попадет в область $\varphi < 0$. Следовательно, амплитуда колебаний не должна превышать значение угла, соответствующее положению равновесия, т.е.

$$\varphi_{\max} < \varphi_1 = 14^\circ. \quad (20)$$

