

Условие

Задание 9-1. Архимед и объем шарового сегмента.

Знаменитый древнегреческий ученый Архимед прославился не только законом о выталкивающей силе, но и многочисленными достижениями в математике. Например, он доказал, что площадь боковой поверхности цилиндра равна площади поверхности сферы, вписанной в этот цилиндр.

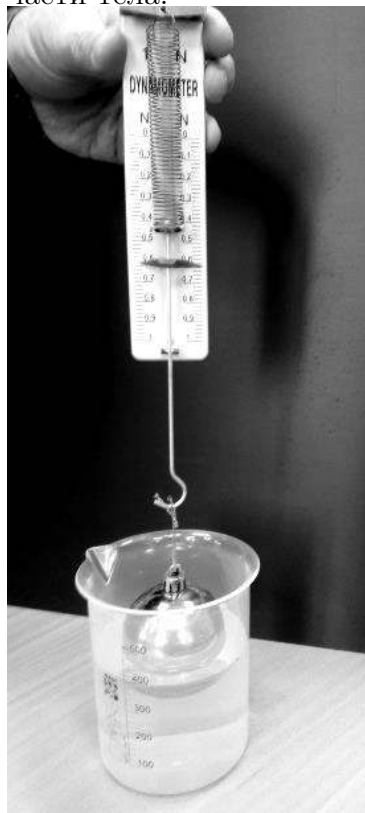
В данном задании Вам предстоит экспериментально повторить некоторые открытия Архимеда.

Приборы и оборудование: динамометр, мензурка, мерный стакан, цилиндр алюминиевый, шар новогодний, шприц, нить, вода.

Подсказка: Закон Архимеда формулируется так: На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная

$$F = \rho g V, \quad (1)$$

Где ρ - плотность жидкости, $g = 10 \frac{M}{c^2}$ - ускорение свободного падения, V - объем погруженной части тела.



Часть 1. Проверка закона Архимеда.

Прикрепите цилиндр к динамометру с помощью нити. Частично опуская цилиндр в мензурку с водой, можно измерять как объем погруженной части, так и силу с которой цилиндр действует на динамометр (далее эту силу будем называть **показания динамометра**).

1.1 Измерьте зависимость показаний динамометра F от объема погруженной части цилиндра V . Постройте график полученной зависимости $F(V)$.

1.2 Получите теоретическую формулу, описывающую зависимость $F(V)$.

1.3. Подтверждают ли полученные экспериментальные данные закон Архимеда? Ответ обоснуйте.

1.4 Используя все экспериментальные данные, рассчитайте плотность воды ρ . Оцените погрешность найденного значения.

Проведите аналогичные измерения для новогоднего шарика. Чтобы шарик тонул, заполните его водой с помощью шприца.

1.5 Измерьте зависимость показаний динамометра F от объема погруженной части шара V . Постройте график полученной зависимости $F(V)$.

1.6 Используя все экспериментальные данные, полученные в п.1.5, рассчитайте плотность воды ρ . Оцените погрешность найденного значения.

Часть 2. Объем шарового сегмента.

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

Объем шарового сегмента рассчитывается по формуле

$$V = \pi R^3 (a\xi^2 + b\xi^3). \quad (2)$$

где R - радиус шара, $\xi = \frac{h}{R}$ - отношение высоты сегмента к радиусу шара, a, b - численные коэффициенты, которые вам необходимо определить на основе проведенных измерений.

Измерения предстоит проводить в мерном стакане. Шкала стакана слишком груба, чтобы получать надежные результаты. Поэтому прикрепите с помощью скотча полоску миллиметровой бумаги рядом со шкалой.

2.1 Измерьте показания высоты h (по полоске миллиметровой бумаги – *рекомендуем измерять в см, но с точностью до мм*) от отметок шкалы стакана V (в мл). Постройте график зависимости $h(V)$.

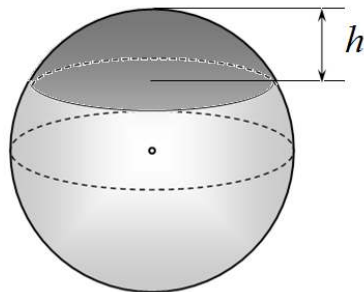
2.2 Найдите по результатам измерений п.2.1 коэффициенты зависимости объема жидкости в стакане от высоты уровня жидкости по миллиметровой бумаге

$$V = kh + c \quad (3)$$

Укажите размерности коэффициентов k и c . Укажите геометрический смысл коэффициента k .

2.3 Проведите измерения зависимости объема сегмента шара V от высоты этого сегмента h . Приведите рисунок, на котором укажите, какие величины вы измеряли, приведите формулы, по которым проведены расчеты. Постройте график зависимости $V(h)$.

2.4 Используя полученные экспериментальные данные рассчитайте значения коэффициентов a, b в формуле (2). Кратко опишите, как вы получили значения этих коэффициентов.



Решение

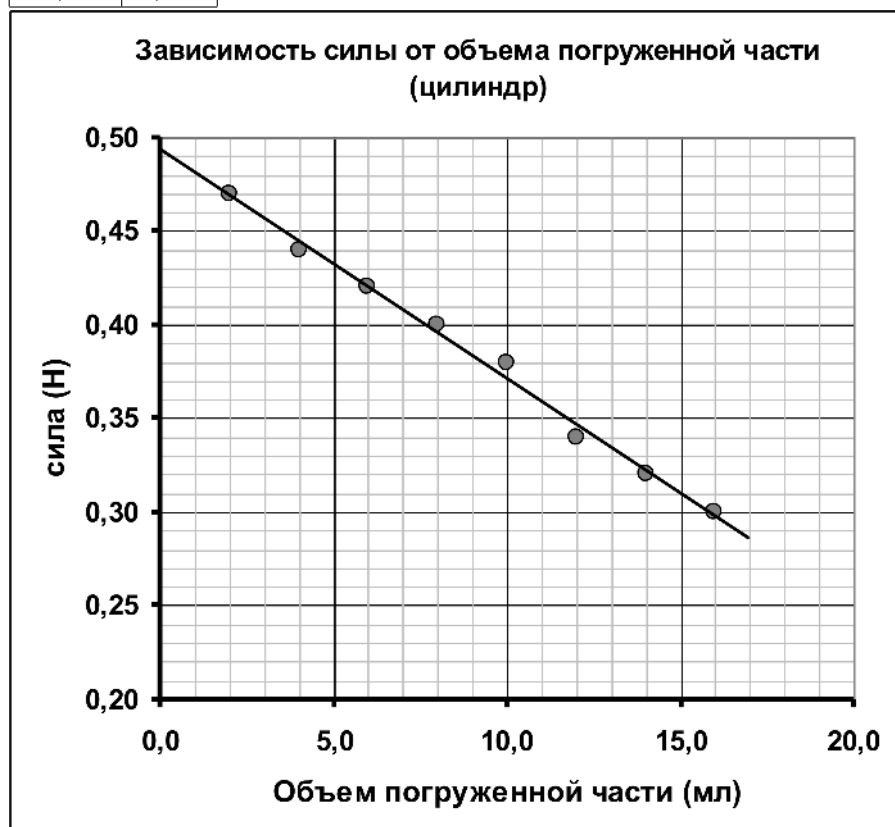
Задание 9-1. Архимед и объем шарового сегмента. Решение.

Часть 1. Проверка закона Архимеда.

1.1 Измеренная зависимость показаний динамометра F от объема погруженной части цилиндра V приведена в таблице 1 и на графике.

Таблица 1.

V, мл	F, Н
2,0	0,47
4,0	0,44
6,0	0,42
8,0	0,40
10,0	0,38
12,0	0,34
14,0	0,32
16,0	0,30



1.2 Теоретическая зависимость имеет очевидный вид

$$F = mg - \rho g V. \quad (1)$$

1.3 Так как полученная зависимость близка к линейной, то она подтверждает справедливость закона Архимеда.

1.4 Коэффициент наклона прямой на графике зависимости $F(V)$ равен

$$a = -(0,012 \pm 0,003) \frac{\text{Н}}{\text{мл}}. \quad (2)$$

Сравнивая с теоретической формулой (1), получаем, что

$$a = -\rho g. \quad (3)$$

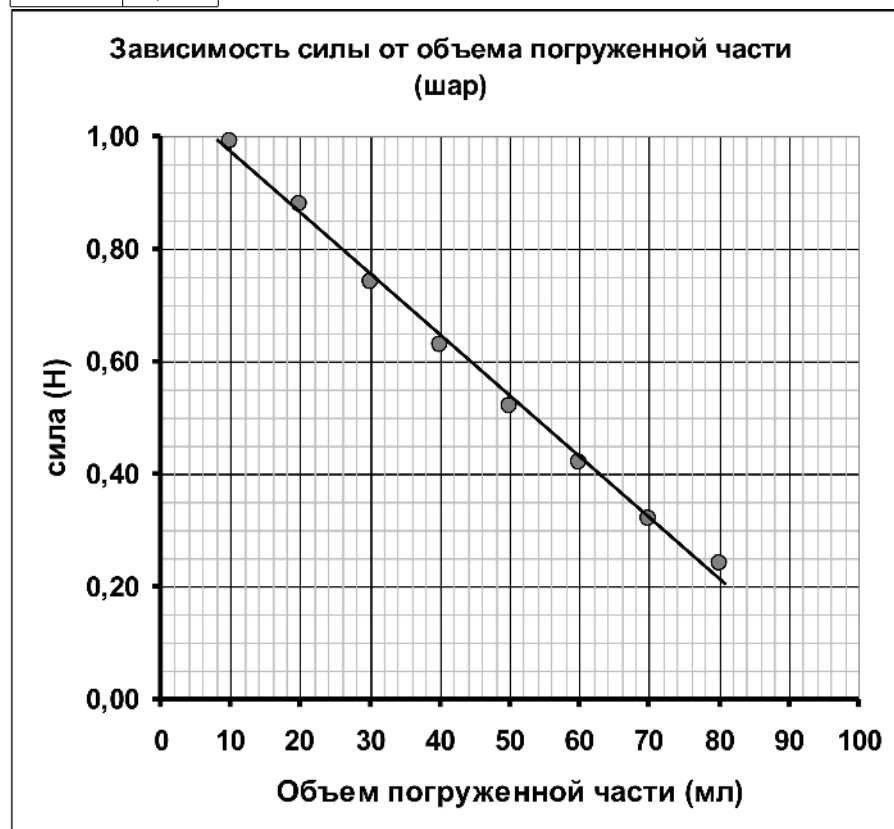
Откуда находим (все единицы надо перевести в единицы СИ), что плотность воды равна

$$\rho = -\frac{a}{g} = (1,2 \pm 0,3) \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (4)$$

1.5 Аналогичные измерения для шара дали результаты, приведенные в Таблице 2 и на соответствующем графике.

Таблица 2.

V, мл	F, Н
10	0,99
20	0,88
30	0,74
40	0,63
50	0,52
60	0,42
70	0,32
80	0,24



1.6 Коэффициент наклона графика равен

$$a = -(0,011 \pm 0,001) \frac{H}{\text{мл}}. \quad (5)$$

Откуда находим плотность воды

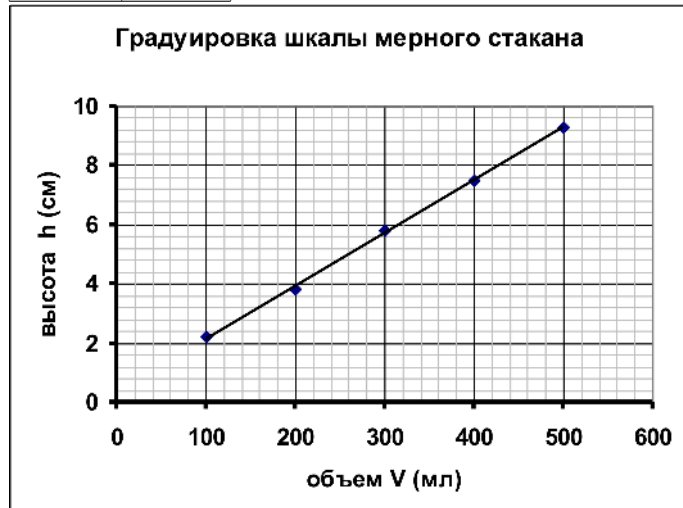
$$\rho = -\frac{a}{g} = (1,1 \pm 0,1) \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (6)$$

Часть 2. Объем шарового сегмента.

2.1 Результаты градуировочных измерений приведены в Таблице 3 и на графике.

Таблица 3.

V, мл	H, см
100	2,2
200	3,8
300	5,8
400	7,5
500	9,3



2.2 Параметры зависимости $V = kh + c$ имеют следующие численные значения

$$k = 55,9 \text{ см}^2$$

$$c = -19,3 \text{ см}^3 \quad (7)$$

Параметр k имеет смысл площади поперечного сечения стакана.

2.3 Для измерения глубины погружения и объема сегмента следует измерять следующие величины по миллиметровой шкале: h_1 - высота уровня воды в стакане; h_2 - высота, на которой находится нижняя точка шара. Тогда объем погруженного сегмента шара рассчитывается по формуле

$$V = k(h_1 - h_0) \quad (8)$$

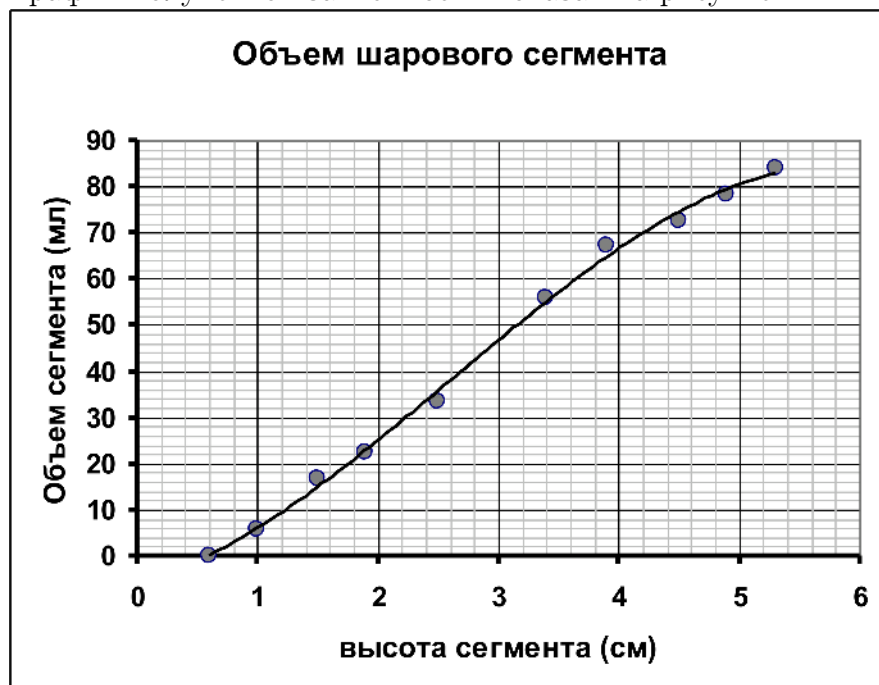
Где h_0 - высота уровня воды в стакане без погруженного шара. Высота сегмента равна

$$h = h_1 - h_2. \quad (9)$$

Результаты измерений этих величин при различных степенях погружения шарика в стакан, а также результаты необходимых расчетов приведены в Таблице 4. В эксперименте $h_0 = 6,1 \text{ см}$
Таблица 4.

h_1 , см	h_2 , см	$h = h_1 - h_2$	$(h_1 - h_0)$	V , мл	ξ	Y
6,1	5,5	0,6	0,0	0,00	0,222	0,000
6,2	5,2	1,0	0,1	5,59	0,370	0,659
6,4	4,9	1,5	0,3	16,77	0,556	0,879
6,5	4,6	1,9	0,4	22,36	0,704	0,730
6,7	4,2	2,5	0,6	33,54	0,926	0,633
7,1	3,7	3,4	1,0	55,90	1,259	0,570
7,3	3,4	3,9	1,2	67,08	1,444	0,520
7,4	2,9	4,5	1,3	72,67	1,667	0,423
7,5	2,6	4,9	1,4	78,26	1,815	0,384
7,6	2,3	5,3	1,5	83,85	1,963	0,352

График полученной зависимости показан на рисунке.



2.4 Для расчетов коэффициентов в формуле для объема сегмента $V = \pi R^3(a\xi^2 + b\xi^3)$, представим ее в линеаризованном виде

$$Y = \frac{V}{\pi R^3 \xi^2} = a + b\xi \quad (10)$$

где R - радиус шара, $\xi = \frac{h}{R}$. Результаты расчетов величин ξ и Y приведены в двух последних столбцах таблицы 4. График этой линеаризованной зависимости близок к линейному. По этому графику находим, что $a \approx 1$, $b \approx -\frac{1}{3}$. Заметим, что эти значения можно найти по двум известным значениям: $Y = \frac{2}{3}$ при $\xi = 1$ (шарик погружен на половину); $Y = \frac{4}{3}$ при $\xi = 2$ (шарик погружен полностью).

Линеаризованная зависимость

