

## Условие

### Задание 11-2. Миг невесомости

Рассмотрим механическую систему, образованную из тонкого гладкого проволочного кольца массой  $M$ , стоящего на горизонтальной плоскости (Рис. 1), и двух небольших одинаковых бусинок массой  $m$  каждая, насаженных на него. Бусинки могут скользить по кольцу без трения.

В начальный момент времени бусинки находятся вблизи верхней точки кольца (см. Рис. 1), а затем их одновременно отпускают без начальной скорости. Далее бусинки симметрично скользят по кольцу без трения, не опрокидывая его, разъезжаются, удаляясь друг от друга, и одновременно съезжаются в нижней точке кольца.

Будем характеризовать положение каждой бусинки на кольце углом  $\alpha$ , образуемым текущим радиусом кольца с вертикалью (Рис. 2). Угол  $\alpha$  измеряется в радианах (рад) и при скольжении каждой бусинки изменяется в пределах  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .

Динамометр  $G$ , вмонтированный в горизонтальную плоскость под кольцом (см. Рис. 2), измеряет зависимость веса  $P(\alpha)$  всей механической системы от угла  $\alpha$  при скольжении бусинок по кольцу.

Соппротивлением воздуха при движении бусинок пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

#### Часть 1. Общая теория

В первой части задачи Вам необходимо вывести формулы для расчёта различных физических параметров системы (силы реакции  $\vec{N}$  кольца (Рис. 3), её вертикальной проекции  $N_y$ , и т.д.) от угла  $\alpha$ .

**1.1** Получите зависимость модуля силы реакции кольца  $N(\alpha) = |\vec{N}(\alpha)|$ , действующей на бусинку, от угла  $\alpha$ .

**1.2** Найдите угол  $\alpha_1$  при котором сила реакции кольца  $N(\alpha)$ , становится равной нулю, т.е. бусинка не давит на кольцо.

**1.3** Разложите силу реакции  $\vec{N}$  кольца на вертикальный и горизонтальный компоненты вдоль стандартных (декартовых осей)  $\vec{N} = \vec{N}_y + \vec{N}_x$ . Найдите зависимость вертикальной проекции  $N_y(\alpha)$  силы реакции кольца от угла  $\alpha$ .

**1.4** Введём понятие приведенной вертикальной проекции  $N_y^*$  силы реакции кольца, как функции  $N_y^*(\alpha) = N_y(\alpha)/mg$ . На выданном бланке постройте график зависимости  $N_y^*(\alpha)$  в интервале  $0 \leq \alpha \leq \pi$  с шагом по углу  $h = 0,05$  рад.

**1.5** Выделите характерные этапы и точки построенного графика  $N_y^*(\alpha)$  и кратко их прокомментируйте с физической точки зрения.

#### Часть 2. Работа с графиком

Во второй части задачи Вам предстоит самое сложное — применить формулы, выведенные в первой части задачи, для «расшифровки» графика, полученного с использованием встроенного динамометра  $G$

11 класс. Теоретический тур. Вариант I.

(см. Рис. 2) при движении бусинок. На графике (Рис. 4) представлена зависимость приведенного веса  $P^*(\alpha) = P(\alpha)/m_0g$  всей механической системы от угла  $\alpha$  в некотором диапазоне, где постоянная  $m_0 = 10$  г. При этом шкала делений по оси абсцисс отсутствует.

**2.1** Используя данные графика (см. Рис. 4), найдите массы бусинки  $m$  и кольца  $M$ . **2.2** Вычислите максимальный вес  $P_{max}$  системы в процессе движения бусинок. При каком значении угла  $\alpha_5$  он достигается? **2.3** Восстановите численные значения по оси абсцисс.

11 класс. Теоретический тур. Вариант I.

**Лист ответов. Задание 11-2. Миг невесомости**

1.1 Зависимость модуля силы реакции кольца  $N(\alpha) = |\vec{N}(\alpha)|$ :

1.2 Угол  $\alpha_1$ :

1.3 Зависимость вертикальной проекции  $N_y(\alpha)$  :

1.4 См. график на бланке в конце Листа ответов

1.5 Характерные этапы и точки построенного графика  $N_y^*(\alpha)$  и их краткий комментарий:  
11 класс. Теоретический тур. Вариант I.

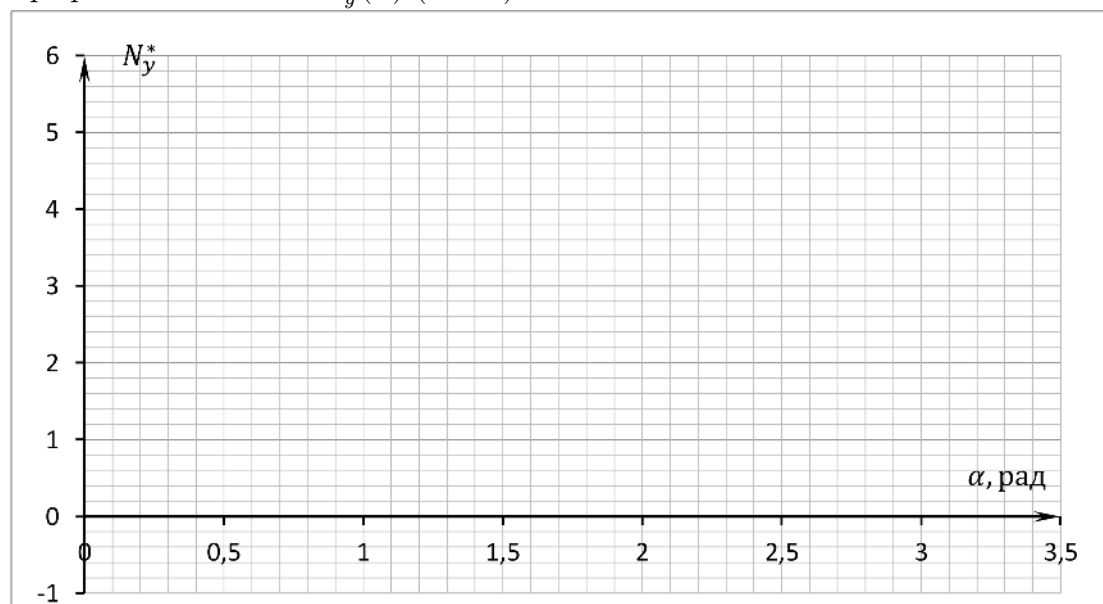
2.1 Массы бусинки  $m$ :

Масса кольца  $M$ :

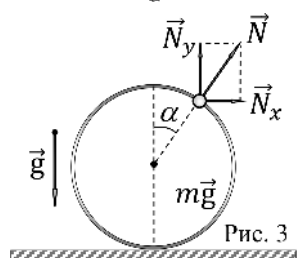
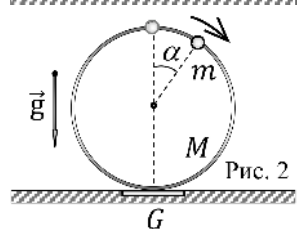
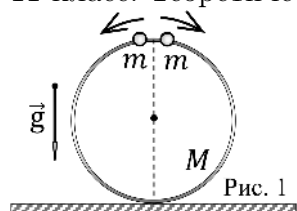
2.2 Максимальный вес  $P_{max}$ :

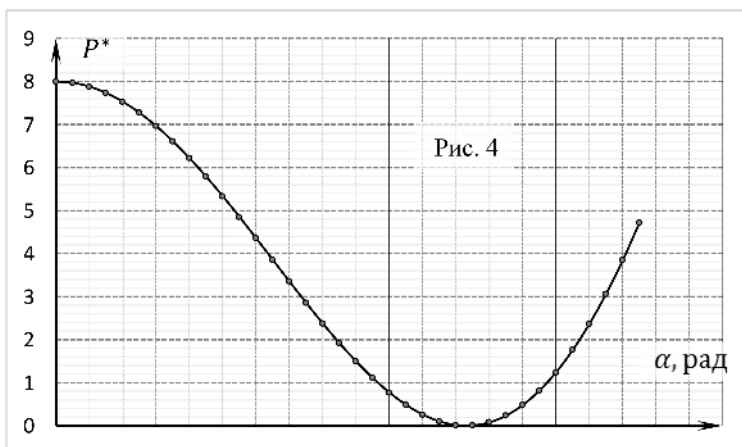
2.3 Восстановленные численные значения по оси абсцисс:

График зависимости  $N_y^*(\alpha)$  (п. 1.4)



11 класс. Теоретический тур. Вариант I.





## Решение

### Задание 11-2. Миг невесомости

Рассмотрим механическую систему, образованную из тонкого гладкого проволочного кольца массой  $M$ , стоящего на горизонтальной плоскости (Рис. 1), и двух небольших одинаковых бусинок массой  $m$  каждая, насаженных на него. Бусинки могут скользить по кольцу без трения.

В начальный момент времени бусинки находятся вблизи верхней точки кольца (см. Рис. 1), а затем их одновременно отпускают без начальной скорости. Далее бусинки симметрично скользят по кольцу без трения, не опрокидывая его, разъезжаются, удаляясь друг от друга, и одновременно съезжаются в нижней точке кольца.

Будем характеризовать положение каждой бусинки на кольце углом  $\alpha$ , образуемым текущим радиусом кольца с вертикалью (Рис. 2). Угол  $\alpha$  измеряется в радианах (рад) и при скольжении каждой бусинки изменяется в пределах  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .

Динамометр  $G$ , вмонтированный в горизонтальную плоскость под кольцом (см. Рис. 2), измеряет зависимость веса  $P(\alpha)$  всей механической системы от угла  $\alpha$  при скольжении бусинок по кольцу.

Сопротивлением воздуха при движении бусинок пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

### Часть 1. Общая теория

В первой части задачи Вам необходимо вывести формулы для расчёта различных физических параметров системы (силы реакции  $\vec{N}$  кольца (Рис. 3), её вертикальной проекции  $N_y$ , и т.д.) от угла  $\alpha$ .

**1.1** Получите зависимость модуля силы реакции кольца  $N(\alpha) = |\vec{N}(\alpha)|$ , действующей на бусинку, от угла  $\alpha$ .

**1.2** Найдите угол  $\alpha_1$  при котором сила реакции кольца  $N(\alpha)$ , становится равной нулю, т.е. бусинка не давит на кольцо.

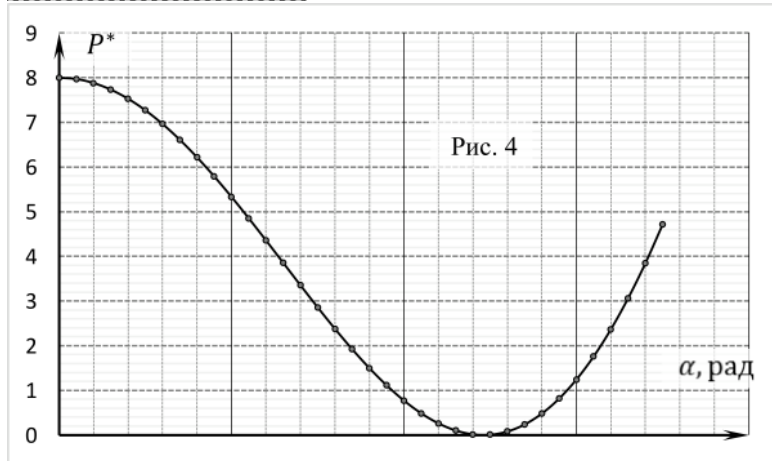
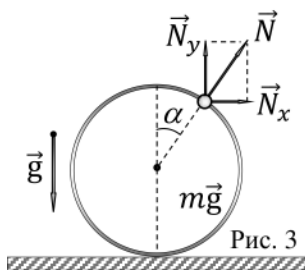
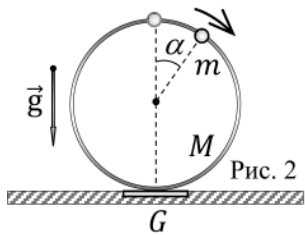
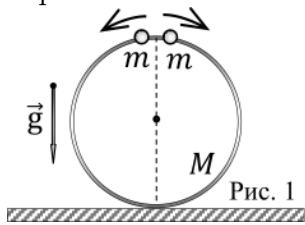
**1.3** Разложите силу реакции  $\vec{N}$  кольца на вертикальный и горизонтальный компоненты вдоль стандартных (декартовых осей)  $\vec{N} = \vec{N}_y + \vec{N}_x$ . Найдите зависимость вертикальной проекции  $N_y(\alpha)$  силы реакции кольца от угла  $\alpha$ .

**1.4** Введём понятие приведенной вертикальной проекции  $N_y^*$  силы реакции кольца, как функции  $N_y^*(\alpha) = N_y(\alpha)/mg$ . На выданном бланке постройте график зависимости  $N_y^*(\alpha)$  в интервале  $0 \leq \alpha \leq \pi$  с шагом по углу  $h = 0,05$  рад.

**1.5** Выделите характерные этапы и точки построенного графика  $N_y^*(\alpha)$  и кратко их прокомментируйте с физической точки зрения.

### Часть 2. Работа с графиком

Во второй части задачи Вам предстоит самое сложное — применить формулы, выведенные в первой части



задачи, для «расшифровки» графика, полученного с использованием встроенного динамометра  $G$  (см. Рис. 2) при движении бусинок.

На графике (Рис. 4) представлена зависимость приведенного веса  $P^*(\alpha) = P(\alpha)/m_0g$  всей механической системы от угла  $\alpha$  в некотором диапазоне, где постоянная  $m_0 = 10$  г. При этом шкала делений по оси абсцисс отсутствует.

**2.1** Используя данные графика (см. Рис. 4), найдите массы бусинки  $m$  и кольца  $M$ .

**2.2** Вычислите максимальный вес  $P_{max}$  системы в процессе движения бусинок. При каком значении угла  $\alpha_2$  он достигается?

**2.3** Восстановите численные значения по оси абсцисс.

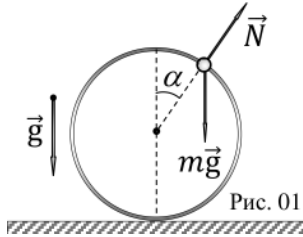
Решение:

### Часть 1. Общая теория

**1.1** Рассмотрим движение одной из бусинок (например, правой), поскольку движение второй бусинки будет происходить совершенно симметрично. Понятно, что в силу симметрии, центр кольца при этом будет оставаться неподвижным, поскольку горизонтальные силы в любой

момент времени будут скомпенсированы.

Пусть бусинка  $B$  оказалась в положении (Рис. 01), когда радиус  $R$  кольца составляет угол  $\alpha$  с вертикалью.



Поскольку на бусинку  $B$  действуют две силы (тяжести и реакции кольца), то уравнение второго закона Ньютона примет вид (см. Рис. 13)

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}. \quad (1)$$

Соответственно, в проекции на направление к центру окружности выражение (1) принимает вид

$$ma_{\text{цс}} = m\frac{v^2}{R} = mg \cos \alpha - N, \quad (2)$$

где  $a_{\text{цс}}$  — центростремительное ускорение бусинки, которое иногда называют также нормальным ускорением  $a_n$ .

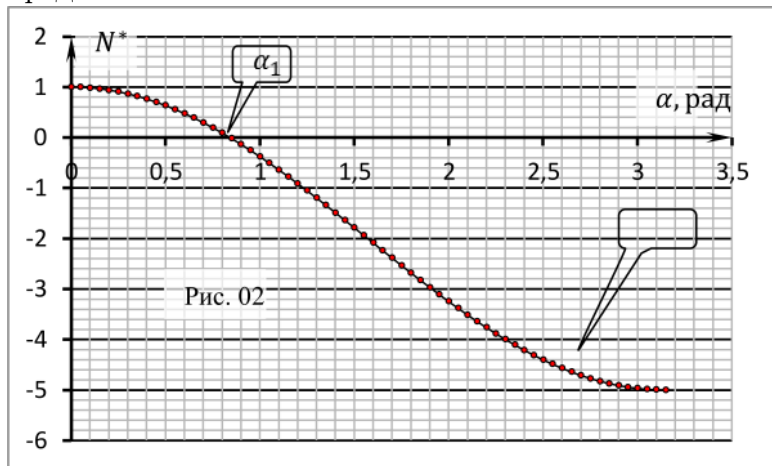
Из закона сохранения энергии следует, что в этот момент времени кинетическая энергия бусинки равна

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha) \Rightarrow \frac{v^2}{R} = 2g(1 - \cos \alpha). \quad (3)$$

Выражая из (2) силу реакции опоры, с учетом (3) получаем

$$N(\alpha) = mg \cos \alpha - m\frac{v^2}{R} = mg(3 \cos \alpha - 2). \quad (4)$$

Строить график зависимости (4) от школьников не требуется, но мы не откажем себе в этом удовольствии. В приведенных (безразмерных) координатах для силы  $N^* = (N(\alpha)/mg)$ , он представлен на Рис. 02.



Из графика следует, что при скольжении бусинки по кольцу сила реакции  $N(\alpha)$  монотонно убывает от начального значения  $mg$ , проходит через нуль (по углу (см. Рис. 02) где-то в

районе  $\alpha_1 \approx 0,83$  рад) и далее становится отрицательной, достигая минимального значения  $(-5mg)$ .

Знак минус в данном случае «кричит» о том, что тело уже не давит на поверхность, а пытается её приподнять! Если бы таким образом скользила шайба по сфере, а не бусинка по кольцу, то в точке  $\alpha_1$  шайба оторвалась бы от сферической поверхности и далее полетела бы по параболе.

**1.2** Итак, согласно (4) модуль силы реакции опоры  $N(\alpha)$  уменьшается по мере скольжения бусинки по кольцу, и становится равен нулю при угле  $\alpha_1$

$$\cos \alpha_1 = \frac{2}{3} \implies \alpha_1 = 48,1^\circ = 0,839 \text{ рад.} \quad (5)$$

Как следует из (5), мы достаточно точно оценили угол  $\alpha_1$  графически в предыдущем пункте задачи (погрешность порядка  $\sim 1\%$ ) «на глаз»! Это значит, что глаз — отличный оптический смарт-прибор, которым можно и нужно пользоваться при первой возможности! :)

Как мы отметили ранее, при дальнейшем движении бусинки ( $\alpha > \alpha_1$ ), сила реакции меняет знак (становится отрицательной!), а это означает, что далее она будет направлена к центру (!) окружности, а не от центра, как это было до сих пор.

С «точки зрения» третьего закона Ньютона, это означает следующее: если ранее бусинка прижимала кольцо к опоре, то теперь начнёт его приподнимать, пытаясь «оторвать» систему от горизонтальной плоскости опоры.

Иными словами, при скольжении бусинки на участке ( $\alpha_1 < \alpha < \pi/2$ ), будет возникать подъемная сила, действующая на кольцо.

**1.3** Разложим силу реакции  $\vec{N}$  кольца на компоненты по стандартным (декартовым) осям координат (см. Рис. 01)

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{N}_y + \vec{N}_x \\ N_y(\alpha) &= N(\alpha) \cos \alpha \\ N_x(\alpha) &= N(\alpha) \sin \alpha \end{aligned} \quad (6)$$

Соответственно, вертикальная проекция силы реакции со стороны обруча на бусинку будет равна

$$N_y(\alpha) = N(\alpha) \cos \alpha = mg(3 \cos \alpha - 2) \cdot \cos \alpha. \quad (7)$$

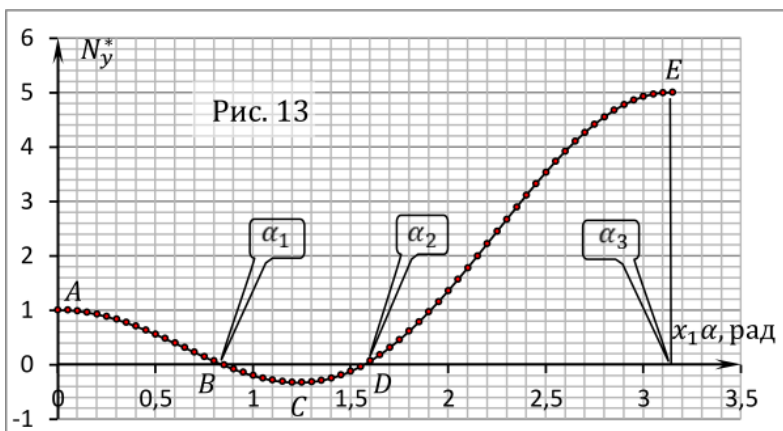
**1.4** Для приведенной вертикальной проекции  $N_y^*(\alpha) = N_y(\alpha)/mg$  получаем выражение

$$N_y^*(\alpha) = \frac{N_y(\alpha)}{mg} = (3 \cos \alpha - 2) \cdot \cos \alpha. \quad (8)$$

Построим график полученной зависимости  $N_y^*(\alpha)$  на интервале  $0 \leq \alpha \leq \pi$  с шагом по углу  $h = 0,05$  рад.

Для этого потребуются более 60 вычислений (о, ужас!!!) на инженерном калькуляторе, которым, заметим, официально разрешено пользоваться! Ведь настоящие «олимпиадные волки» не боятся трудностей...

По итогу, заполнив соответствующую таблицу вычислений (без таблицы график не засчитывается!), по точкам на выданном бланке построим достаточно «красивую» кривую, приведенную на Рис. 13.



**1.5** Характерные этапы и точки построенного графика включают в себя участки положительных и отрицательных значений функции, промежутки её возрастания и убывания, точки пересечения с осями абсцисс и ординат, точки экстремумов (минимумов и максимумов) функции, точки перегиба и т.д.

В данном пункте задачи достаточно заметить, что на участке  $AB$  (см. Рис. 13) функция  $N_y^*(\alpha)$  убывает до нуля в точке  $\alpha_1 = 48,1^\circ = 0,839$  рад, что, согласно (4), соответствует точке «зануления» силы реакции опоры.

На участке  $BD$  (см. Рис. 13) функция  $N_y^*(\alpha)$  становится отрицательной, т.е. именно здесь возникает «подъёмная сила» со стороны движущихся бусинок.

В некоторой точке  $C$  имеется минимум (максимальная подъёмная сила!), далее в точке  $\alpha_2 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} = 1,57$  рад (см. Рис. 13) функция  $N_y^*(\alpha)$  вновь «зануляется» (сила реакции  $\vec{N}$  в этот момент горизонтальна!).

После этого функция  $N_y^*(\alpha)$  возрастает от нуля до максимального значения (+5) в точке  $\alpha_3 = 180^\circ = \pi = 3,14$  рад (см. Рис. 13), что соответствует сближению бусинок в нижней точке кольца.

## Часть 2. Работа с графиком

**2.1** Как следует из графика, представленного в условии задачи, в точке минимума  $A$  функция приведенного веса системы  $P^*(\alpha) = P(\alpha)/m_0g$  (Рис. 14) касается оси абсцисс. Отсюда делаем вывод, что при данных значениях масс бусинки  $m$  и кольца  $M$  вес всей механической системы в этой точке графика также равен нулю

$$P(\alpha) = 0. \quad (9)$$

Иными словами, наблюдается «кратковременная невесомость», т.е. в этой точке графика «исчезает» сила давления системы на плоскость.

Как следует из решения пункта **1.5**, это возможно, если сила тяжести кольца будет уравновешена двумя подъёмными силами бусинок, скользящих на участке  $BD$  (см. Рис. 13) графика. Запишем выражение для веса механической системы с учётом (4) и (7) для двух бусинок и кольца

$$P(\alpha) = Mg + 2N_y(\alpha) = g(M + 2m(3 \cos \alpha - 2) \cdot \cos \alpha). \quad (10)$$

Минимум функции (10) определяется минимумом функции (8), поскольку остальные величины в (10) есть константы.

Поскольку функция (10) относительно  $\cos \alpha$  есть парабола, ветви которой направлены вверх, а её корни 0 и  $2/3$ , то минимум данной функции достигается в точке

$$\cos \alpha_4 = \frac{1}{3} \implies \alpha_4 = 70,5^\circ = 1,23 \text{ рад}, \quad (11)$$

и равен

$$(3 \cos \alpha_4 - 2) \cdot \cos \alpha_4 = -\frac{1}{3}. \quad (12)$$

Соответственно, для минимального веса всей механической системы имеем

$$P_{\min}(\alpha) = Mg + 2N_y(\alpha_3) = g \left( M + 2m \left( 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \right) \cdot \frac{1}{3} \right) = g \left( M - m \frac{2}{3} \right). \quad (13)$$

Следовательно, для возникновения «точки невесомости» на графике  $P^*(\alpha)$  необходимо выполнение следующего соотношения между массами одной бусинки  $m$  и кольца  $M$

$$m = \frac{3}{2}M. \quad (14)$$

Используя график из условия находим, что в начальный момент времени вес системы равен  $8m_0g$ , следовательно

$$8m_0g = (M + 2m)g \implies M + 2m = 8m_0. \quad (15)$$

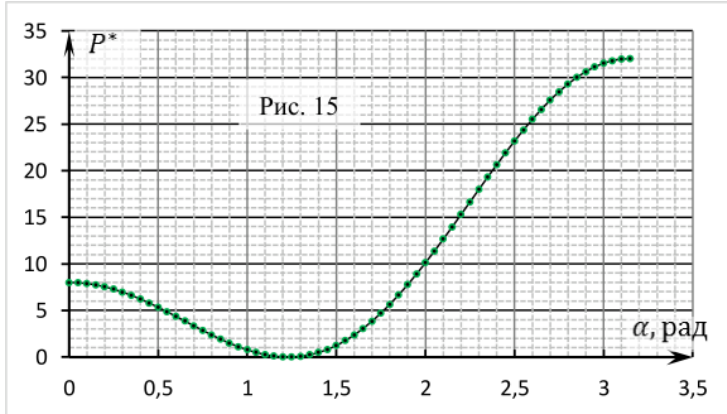
Решая систему (14) – (15), получим

$$\begin{aligned} m &= 3m_0 = 30 \text{ г} \\ M &= 2m_0 = 20 \text{ г} \end{aligned} \quad (16)$$

Для любителей дифференцирования заметим, что минимум (11) для угла  $\alpha_4$  можно найти, взяв производную от (10) по углу – результат, конечно же, получается аналогичным :). **2.2** Как следует из (10), максимальный вес системы достигается при  $\alpha = \alpha_5 = \pi = 3,14$ , в момент сближения бусинок в нижней части кольца. Следовательно, используя (9), находим

$$P_{\max} = P(\alpha = \pi) = g(M + 2m(3 \cdot (-1) - 2) \cdot (-1)) = 32m_0g. \quad (17)$$

График зависимости приведенного веса  $P^*(\alpha) = P(\alpha)/m_0g$  на всем промежутке изменения угла  $\alpha$  представлен на Рис. 15 (от школьников не требуется).

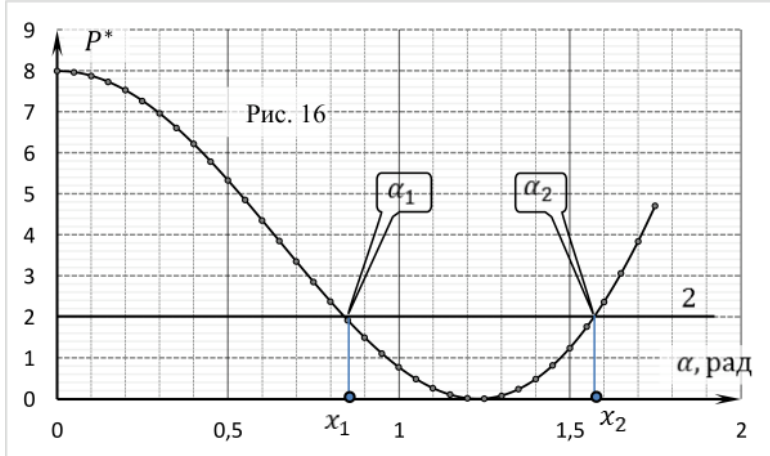


**2.3** Для восстановления оцифровки оси абсцисс (углов) достаточно задать её начало отсчета и масштабный (мерный) отрезок, определяющий «расстояние» (т.е. угол) между основными делениями сетки вдоль данной оси.



С началом отсчета все понятно, поскольку вес системы в начальный момент равен  $8m_0g$ . Следовательно, начало отсчета оси абсцисс и оси ординат совпадают – нуль по одной оси соответствует нулю по второй оси.

Для определения масштабного отрезка необходимо точно установить абсциссы  $(x_1; x_2)$  двух любых точек на данной оси. Действительно, далее, используя, например, линейку и циркуль, можно проградуировать всю шкалу подобными отрезками (или их частями).



Для этой цели удобно выбрать точку  $\alpha_1$  (или  $\alpha_2$ ) нулевого веса бусинок (см. Рис. 13), поскольку в этот момент динамометр  $G$  зафиксирует вес системы, как вес кольца, т.е. равным  $Mg = 2m_0g$ . Заметим, что удобнее даже брать точку  $\alpha_2$ , т.к. при этом мы сразу находим «популярную» точку  $\frac{\pi}{2}$  на оси абсцисс (углов). В качестве второй «реперной» точки опять же можно всегда выбрать точку начала координат.

Проведем горизонтальную прямую  $Mg/m_0g = 2$  до пересечения с графиком (Рис. 15) и найдем соответствующие углы. Итак, у нас для восстановления шкалы выбраны точки

$$x_1 = \alpha_1 = 0,839 \text{ рад}; \quad x_2 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2} = 1,57 \text{ рад}; \quad x_3 = \alpha_3 = 0,00 \text{ рад}. \quad (18)$$

Заметим, что в рамках выбранной модели оцифровки оси абсцисс, верной следует считать подобную процедуру с любой из двух характерных точек на Рис. 16. :)

