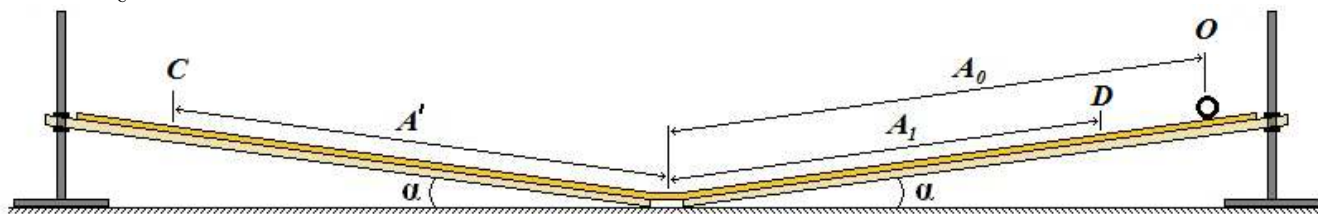


Условие

Задание 11-1. Негармонические колебания

Оборудование: два штатива, желоб пластиковый длиной 110см закреплённый на двух дощечках длиной 56см каждая (ширина дощечек 5,0 - 6,0см, толщина 1,0 - 2,0см), шарик стальной диаметром 2,5см, мерная лента, секундомер, линейка 40см, скотч тонкий, ножницы.

В данной задаче Вам предстоит исследовать негармонические колебания шарика в V-образном желобе. Желоб в штативах должны установить организаторы олимпиады предварительно. Экспериментальная установка должна выглядеть как на рисунке 1. Искривлением желоба в изгибе при выводе уравнений пренебречь. Под полным колебанием будем понимать движение шарика из точки О в точку С и возврат в точку D. Угол наклона желоба α в части 1 и 2 задачи установите таким, чтобы $\operatorname{tg} \alpha \leq 0,08$. При вычислениях используйте значение $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.



Часть 1. Период и амплитуда

1.1 Получите уравнение зависимости между периодом колебания T и амплитудой A_0 для физической модели движения шайбы по гладкой V-образной поверхности. Считайте, что в изгибе поверхности удара не происходит. В уравнении используйте так же необходимые величины указанные на рисунке 1.

1.2 Экспериментально исследуйте зависимость периода первого колебания шарика по V-образному желобу от начальной амплитуды $T(A_0)$.

1.3 Используя результаты полученные в п.1.2, обоснуйте, можно ли применять физическую модель движения шайбы по гладкой V-образной поверхности к колебаниям шарика по V-образному желобу. (*Подсказка:* проверьте графически, подтверждается или нет уравнение, полученное Вами в п.1.1).*

Часть 2. Декремент затухания

Быстроту затухания колебаний описывают с помощью декремента затухания D , который равен отношению начальных амплитуд двух последовательных колебаний $D = \frac{A_i}{A_{i+1}}$ (1).

2.1 Исследуйте экспериментально зависимость начальной амплитуды от порядкового номера колебания $A_i(i)$.

2.2 Используя результаты полученные в п.2.1, подтвердите или опровергните справедливость уравнения (1) для колебаний шарика по V-образному желобу. Определите декремент затухания. Вычислите погрешности.

2.3 Окончательный результат запишите в виде $D = \langle D \rangle \pm \Delta D$

Часть 3. Период и угол наклона желоба

3.1 Получите уравнение зависимости $T(\alpha)$ между периодом T первого колебания шарика по V-образному желобу и углом наклона сторон желоба α . (*Подсказка. Амплитуды A_0 , A' , A_1 считайте известными и независимыми от угла α . Если Вам понадобится ввести в уравнение константу, то смело вводите и поясните её. В зависимости $T(\alpha)$ будет не сам угол, а некоторая тригонометрическая функция угла*).

3.2 Исследуйте экспериментально зависимость периода колебания от угла наклона желоба $T(\alpha)$. Угол наклона желоба увеличивайте до тех пор пока не обнаружите проскальзывание шарика по желобу во время движения.

3.3 Используя результаты полученные в п.3.2, проверьте, подтверждается или нет зависимость, полученная Вами в п.3.1.

Решение

Задание 11-1. Негармонические колебания *Решение* Часть 1. Период и амплитуда

1.1 Движение шайбы по гладкой V-образной поверхности будет представлять собой незатухающие колебания. Движение шайбы будет равноускоренным с модулем ускорения $a = g \sin \alpha$ (2).

$$A_0 = \frac{at_1^2}{2}, \quad (3)$$

где t_1 — время спуска или подъёма по одной стороне V-образной поверхности. Тогда период колебаний

$$T = 4t_1 = 4\sqrt{\frac{2A_0}{a}}, \quad (4)$$

$$\text{или } T = 4\sqrt{\frac{2A_0}{g \sin \alpha}}. \quad (5)$$

1.2 Результаты экспериментального исследования зависимости $T(A_0)$ при угле наклона желоба $\sin \alpha = \frac{39\text{мм}}{492\text{мм}} = 0,0793$ ($\text{tg } \alpha = 0,079$) представлены в табл. 1.

Таблица 1

** A_0 , см**	Повторные измерения					
	** T_1 , с**	** T_2 , с**	** T_3 , с**	** T_4 , с**	** T_5 , с**	** $\langle T \rangle$, с**
5	1,83	1,85	1,87	1,84	1,80	1,84
10	2,43	2,41	2,39	2,40	2,47	2,42
15	2,97	2,93	2,91	3,01	2,93	2,95
20	3,42	3,38	3,45	3,34	3,41	3,40
25	3,82	3,83	3,80	3,84	3,81	3,82
30	4,23	4,20	4,18	4,25	4,24	4,22
35	4,47	4,48	4,45	4,44	4,55	4,48
40	4,74	4,77	4,80	4,72	4,77	4,76
45	5,02	5,02	5,06	4,99	5,01	5,02
50	5,34	5,39	5,37	5,36	5,33	5,36

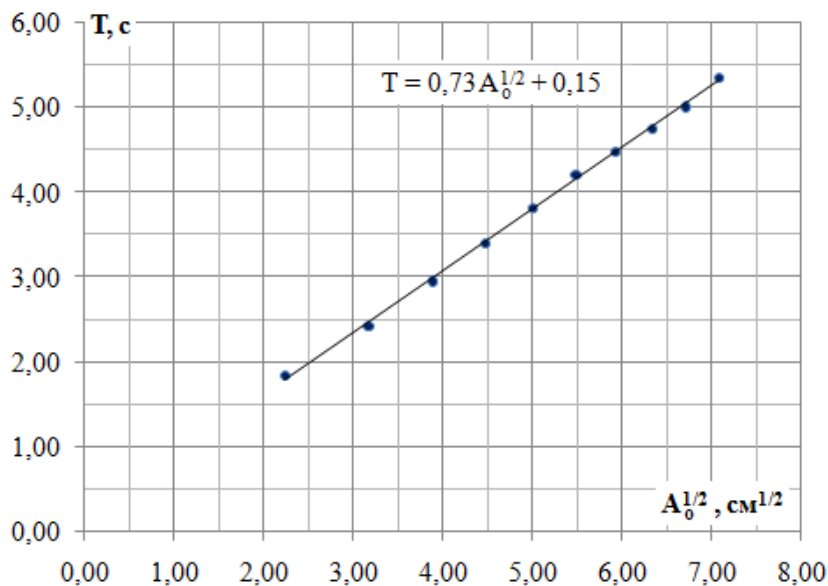
2023-2024 учебный год

1.3 Исходя из уравнения (5), построим график линеаризованной зависимости $T(\sqrt{A_0})$ (график 1). Для этого вычислим значения $\sqrt{A_0}$ (таблица 2).

Таблица 2

$A_0, \text{ см}$	$\sqrt{A_0}, \text{ см}^{1/2}$	$\langle T \rangle, \text{ с}$
5,0	2,24	1,84
10,0	3,16	2,42
15,0	3,87	2,95
20,0	4,47	3,40
25,0	5,00	3,82
30,0	5,48	4,22
35,0	5,92	4,48
40,0	6,32	4,76
45,0	6,71	5,02
50,0	7,07	5,36

**График 1. Зависимость $T(\sqrt{A_0})$ **



Применяя метод наименьших квадратов (можно применять простую графическую обработку, но она оценивается «дешевле»), определим коэффициенты линеаризованной зависимости и их абсолютные погрешности (таблица 3). Если данные коэффициенты совпадут с точностью до погрешности со значением коэффициентов в уравнении (5), то модель движения шайбы по гладкой V-образной поверхности можно применять к колебаниям шарика по V-образному желобу, в противном случае — нельзя.

2023-2024 учебный год

Таблица 3

	$A_0, \text{ см}$	$\sqrt{A_0}, \text{ см}^{1/2}$	$\langle T \rangle, \text{ с}$
	5	2,24	1,84
	10	3,16	2,42
	15	3,87	2,95
	20	4,47	3,40
	25	5,00	3,82
	30	5,48	4,22
	35	5,92	4,48
	40	6,32	4,76
	45	6,71	5,02
	50	7,07	5,36
Сред. знач.		5,02	3,83
Дисперсия		2,26	1,21
Ковариация		1,65	
	$\langle a \rangle$	0,73	
	$\langle b \rangle$	0,15	
	Δa	0,02	
	Δb	0,09	

Получили: угловой коэффициент наклона усредняющей прямой

$$a = (0,73 \pm 0,02) \frac{\text{с}}{\text{см}^{1/2}},$$

свободное слагаемое

$$b = (0,15 \pm 0,09) \text{ с.}$$

Коэффициент пропорциональности $a_{(5)}$ в уравнении (5)

$$a_{(5)} = 4 \sqrt{\frac{2}{g \sin \alpha}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{981 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \cdot \frac{39 \text{ мм}}{492 \text{ мм}}}} = 0,64.$$

Основной вклад в погрешность данного коэффициента будет вносить высота сторон V-образного желоба над поверхностью стола. В авторском эксперименте данная величина $h = (39 \pm 1) \text{ мм}$.

Следовательно $\varepsilon_h = 0,026$. Можно считать, что $\varepsilon_{a_{(5)}} = \varepsilon_h = 0,026$,

$$\Delta a_{(5)} = a_{(5)} \cdot \varepsilon_{a_{(5)}} = 0,64 \frac{\text{с}}{\text{см}^{1/2}} \cdot 0,026 = 0,02 \frac{\text{с}}{\text{см}^{1/2}}.$$

$$a_{(5)} = (0,64 \pm 0,02) \frac{\text{с}}{\text{см}^{1/2}}.$$

Как видим интервалы погрешностей коэффициентов a и $a_{(5)}$ не перекрываются, а так же свободное слагаемое в экспериментальной зависимости (график 1) нельзя считать равным нулю так как $\langle b \rangle > \Delta b$. Из этого следует, что экспериментальную зависимость (график 1) нельзя описывать уравнением (5), а

2023-2024 учебный год

значит модель движения шайбы по гладкой V-образной поверхности нельзя применять к колебаниям шарика по V-образному желобу.

Часть 2. Декремент затухания

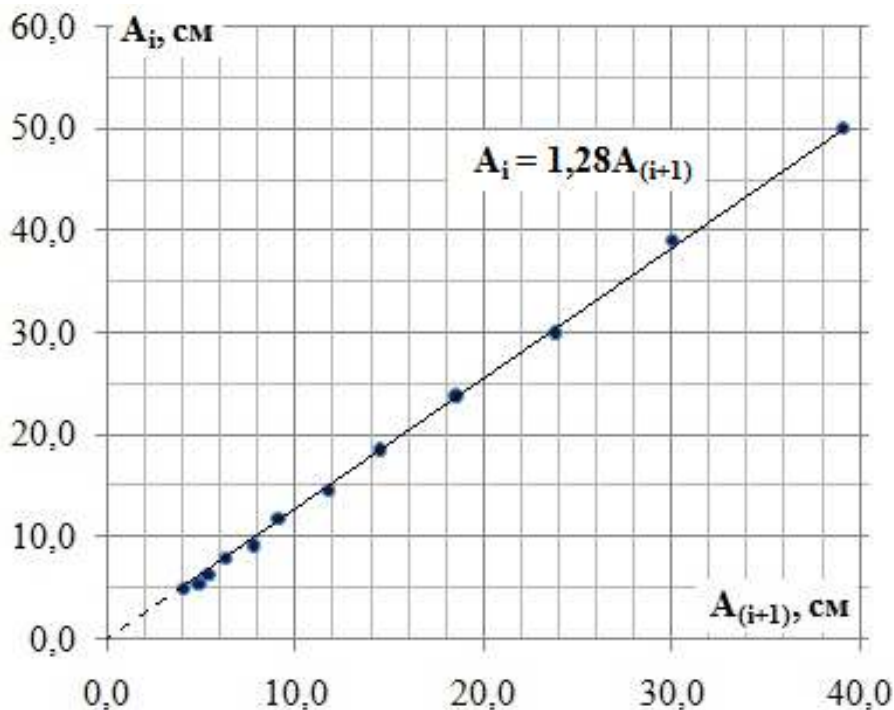
2.1 Результаты экспериментального исследования зависимости начальной амплитуды от порядкового номера колебания $A_i(i)$ представлены в таблице 4.

Таблица 4

Номер колебания N	Повторные измерения					$\langle A \rangle$, см
	A_1 , см	A_2 , см	A_3 , см	A_4 , см	A_5 , см	
0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0
1	39,0	39,0	39,5	38,5	39,0	39,0
2	30,0	29,5	30,0	30,0	30,5	30,0
3	24,0	24,0	23,5	23,5	24,0	23,8
4	18,5	18,0	18,5	19,0	18,5	18,5
5	14,5	15,0	14,5	14,0	14,5	14,5
6	12,0	12,0	12,0	11,5	11,5	11,8
7	9,0	9,5	9,0	9,0	9,0	9,1
8	8,0	8,0	7,5	7,5	8,0	7,8
9	6,5	6,5	6,5	6,0	6,0	6,3
10	5,5	5,5	5,0	5,5	5,5	5,4
11	5,0	5,0	5,0	4,5	5,0	4,9
12	4,0	4,0	4,5	4,0	4,0	4,1

2.2 Представим уравнение (1) в виде $A_i = DA_{i+1}$ (6). Построим график зависимости $A_i(A_{i+1})$.

$A_{(i+1)}$, см	A_i , см
39,0	50,0
30,0	39,0
23,8	30,0
18,5	23,8
14,5	18,5
11,8	14,5
9,1	11,8
7,8	9,1
6,3	7,8
5,4	6,3
4,9	5,4
4,1	4,9



Из графика видим, что экспериментальные точки легли вблизи усредняющей прямой, которая проходит через начало координат, что

2023-2024 учебный год

подтверждает прямопропорциональную зависимость $A_i(A_{i+1})$, следовательно уравнение (6), а значит и уравнение (1) применимо для колебаний шарика по V-образному желобу.

Применяя метод наименьших квадратов, определим декремент затухания как угловой коэффициент наклона усредняющей прямой (график 2) и вычислим абсолютную погрешность (таблица 5).

Таблица 5

	$A_{i+1}, \text{ см}$	$A_i, \text{ см}$
	39,0	50,0
	30,0	39,0
	23,8	30,0
	18,5	23,8
	14,5	18,5
	11,8	14,5
	9,1	11,8
	7,8	9,1
	6,3	7,8
	5,4	6,3
	4,9	5,4
	4,1	4,9
Среднее зн.	14,6	18,4
Дисперсия	115	195
Ковариация	149	
$\langle D \rangle$	1,28	
ΔD	0,02	

Относительная погрешность $\mathcal{E}_D = \frac{\Delta D}{\langle D \rangle} = \frac{0,02}{1,28} = 0,016 = 1,6\%$.

2.3 $D = 1,28 \pm 0,02$

2023-2024 учебный год

Часть 3. Период и угол наклона желоба

3.1 Если бы желоб был гладкий и по нему двигалась шайба, то она двигалась бы с ускорением $a = g \sin \alpha$ (2). Однако, у нас по желобу движется шарик, при движении он вращается. Следовательно часть начальной потенциальной энергии шарика преобразуется в кинетическую энергию вращения. Это приводит к тому, что уменьшается кинетическая энергия поступательного движения центра шарика, а значит ускорение поступательного движения центра шарика будет меньше чем у шайбы при том же угле наклона желоба. Но ускорение шарика будет прямо пропорционально g и $\sin \alpha$. Поэтому для ускорения шарика можем записать

$$a_{\text{ш}} = k_1 g \sin \alpha, \quad (7)$$

где $k_1 < 1$ - некоторый постоянный коэффициент, не зависящий от угла наклона сторон желоба, не имеющий единиц измерения. Период первого колебания будет равен сумме временных интервалов необходимых для последовательного прохождения следующих расстояний: амплитуда A_0 , удвоенная амплитуда A' , амплитуда A_1 .

$$T = \sqrt{\frac{2A_0}{k_1 g \sin \alpha}} + 2\sqrt{\frac{2A'}{k_1 g \sin \alpha}} + \sqrt{\frac{2A_1}{k_1 g \sin \alpha}}, \quad (8)$$

$$T = \left(\sqrt{\frac{2A_0}{k_1 g}} + 2\sqrt{\frac{2A'}{k_1 g}} + \sqrt{\frac{2A_1}{k_1 g}} \right) \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}}. \quad (9)$$

Обозначим

$$\sqrt{\frac{2A_0}{k_1 g}} + 2\sqrt{\frac{2A'}{k_1 g}} + \sqrt{\frac{2A_1}{k_1 g}} = k, \quad (10)$$

k - некоторый постоянный коэффициент с размерностью времени. Тогда уравнение (9) можно записать в виде:

$$T = \frac{k}{\sqrt{\sin \alpha}}. \quad (11)$$

3.2 Результаты экспериментального исследования зависимости периода колебания от угла наклона желоба $T(\alpha)$ представлены в таблице 6.

2023-2024 учебный год

Таблица 6

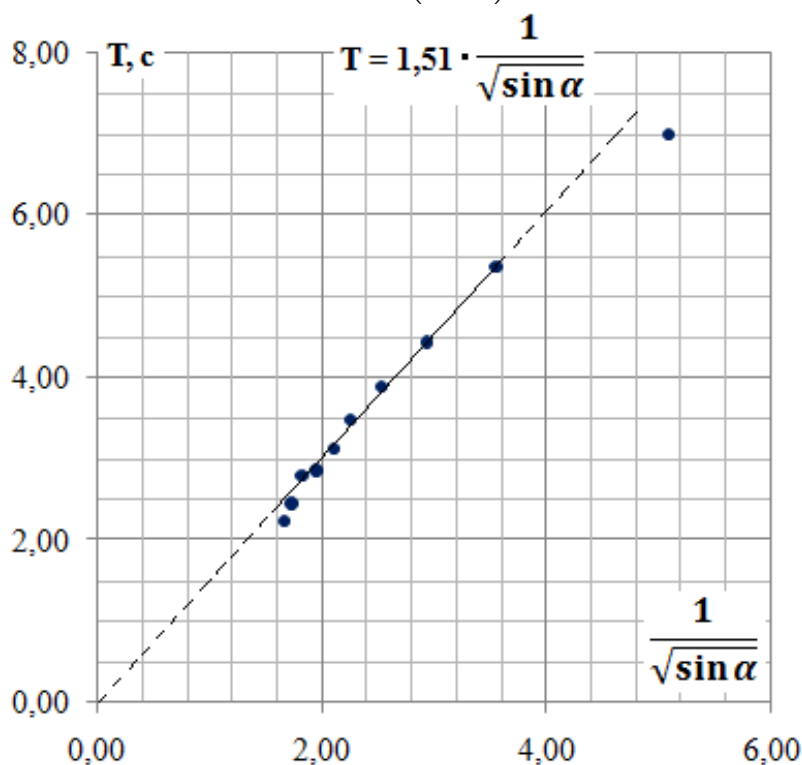
Величины, необходимые для вычисления $\sin \alpha$			Повторные измерения					
Высота h , мм	Гипотенуза c , мм	$\sin \alpha = \frac{h}{c}$	T_1 , с	T_2 , с	T_3 , с	T_4 , с	T_5 , с	Период T , с
19	492	0,039	7,03	6,96	6,95	7,01	6,95	6,98
39	492	0,079	5,32	5,39	5,35	5,34	5,40	5,36
57	492	0,116	4,43	4,46	4,43	4,41	4,47	4,44
77	492	0,157	3,87	3,91	3,90	3,88	3,89	3,89
97	492	0,197	3,46	3,48	3,50	3,47	3,49	3,48
111	492	0,226	3,13	3,12	3,15	3,10	3,15	3,13
130	492	0,264	2,89	2,85	2,89	2,86	2,86	2,87
149	492	0,303	2,80	2,82	2,78	2,83	2,82	2,81
165	492	0,335	2,45	2,40	2,50	2,44	2,51	2,46
178	492	0,362	2,22	2,29	2,20	2,26	2,28	2,25

3.3 Построим график линейризованной зависимости $T \left(\frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \right)$ (график 3). Вычислим значения выражения $\frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}}$ (таблица 7).

Таблица 7

$\sin \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}}$	$T, \text{ c}$
0,039	5,09	6,98
0,079	3,55	5,36
0,116	2,94	4,44
0,157	2,53	3,89
0,197	2,25	3,48
0,226	2,11	3,13
0,264	1,95	2,87
0,303	1,82	2,81
0,335	1,73	2,46
0,362	1,66	2,25

**График 3. Зависимость $T \left(\frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \right)$ **



Как видно из графика 3, уравнению (11) соответствуют точки удовлетворяющие неравенству $0,079 \leq \sin \alpha \leq 0,335$ так как для точек, принадлежащих этому интервалу, усредняющая прямая экстраполируется в начало координат. Верхняя и нижняя точки на графике выпадают. Исходя из графика можно считать, что уравнение (11) выполняется для углов наклона сторон желоба $4,5^\circ \leq \alpha \leq 19,5^\circ$.

2023-2024 учебный год