

## Шарик и параллелепипед

### Условие

#### Задание 9-2. Двойное скольжение

Справочные данные и параметры рассматриваемых систем:\* трением и сопротивлением воздуха в данном задании пренебречь.

**1.1 «Шарик и параллелепипед»** Небольшой шарик, привязанный легкой нерастяжимой нитью к вертикальной стенке в точке  $O$  (Рис. 1), свисает с параллелепипеда размерами  $a \times b$  (в плоскости рисунка), слегка касаясь горизонтальной поверхности. Параллелепипед начинают двигать вправо с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Найдите скорость  $\vec{u}_1$  шарика в процессе его скольжения по вертикальной стенке параллелепипеда. Опишите его траекторию на этом участке движения, укажите её существенные параметры. Считайте, что в процессе движения шарик не отрывается от параллелепипеда.

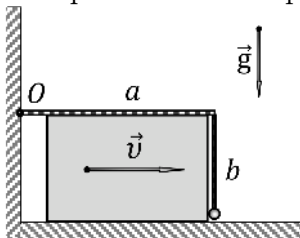


Рис. 1

**1.2 «Шарик и наклонная плоскость»** Усложним задачу и рассмотрим небольшой шарик, привязанный легкой нерастяжимой нитью к стене, который лежит на наклонной плоскости (Рис. 2), слегка касаясь горизонтальной поверхности. Наклонную плоскость начинают двигать вправо с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Найдите скорость  $\vec{u}_2$  шарика в процессе его скольжения по наклонной плоскости. Опишите его траекторию на этом участке движения, укажите её существенные параметры. Считайте, что в процессе движения шарик не отрывается от наклонной плоскости. Угол наклона плоскости к горизонту  $\alpha$ , ее длина  $l$ .

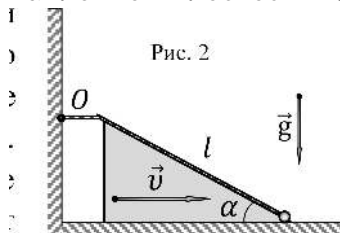
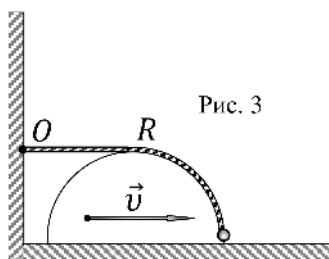


Рис. 2

**1.3 «Шарик и полусфера»** Еще более усложним задачу и рассмотрим небольшой шарик на легкой нерастяжимой нити, который лежит на полусфере (Рис. 3), слегка касаясь горизонтальной поверхности. Полусферу начинают двигать вправо с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Найдите скорость  $\vec{u}_3(x)$  шарика в процессе его скольжения по полусфере в момент времени, когда полусфера сместилась на расстояние  $x$  ( $x < R$ ). Опишите его траекторию на этом участке движения, укажите её существенные параметры. Считайте, что в процессе движения шарик не отрывается от полусферы. Радиус полусферы  $R$ .



9 класс. Теоретический тур. Вариант 1.

### Лист ответов. Задание 9-2. Двойное скольжение

1.1 Скорость  $\vec{u}_1$  шарика:

Траектория шарика:

1.2 Скорость  $\vec{u}_2$  шарика:

Траектория шарика:

1.3 Скорость  $\vec{u}_3(x)$  шарика:

Траектория шарика:

9 класс. Теоретический тур. Вариант 1.

### Решение

#### Задание 9-2. Двойное скольжение

*Справочные данные и параметры рассматриваемых систем:*\* трением и сопротивлением воздуха в данном задании пренебречь.

**1.1 «Шарик и параллелепипед»** Небольшой шарик, привязанный легкой нерастяжимой нитью к вертикальной стенке в точке  $O$  (Рис. 1), свисает с параллелепипеда размерами  $a \times b$  (в плоскости рисунка), слегка касаясь горизонтальной поверхности. Параллелепипед начинают двигать вправо с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Найдите скорость  $\vec{u}_1$  шарика в процессе его скольжения по вертикальной стенке параллелепипеда. Опишите его траекторию на этом участке движения, укажите её существенные параметры. Считайте, что в процессе движения шарик не отрывается от параллелепипеда.

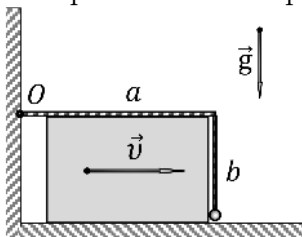
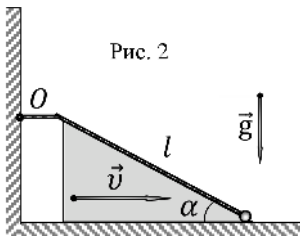
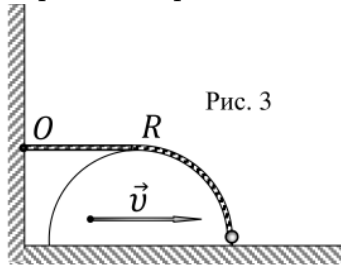


Рис. 1

**1.2 «Шарик и наклонная плоскость»** Усложним задачу и рассмотрим небольшой шарик, привязанный легкой нерастяжимой нитью к стене, который лежит на наклонной плоскости (Рис. 2), слегка касаясь горизонтальной поверхности. Наклонную плоскость начинают двигать вправо с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Найдите скорость  $\vec{u}_2$  шарика в процессе его скольжения по наклонной плоскости. Опишите его траекторию на этом участке движения, укажите её существенные параметры. Считайте, что в процессе движения шарик не отрывается от наклонной плоскости. Угол наклона плоскости к горизонту  $\alpha$ , ее длина  $l$ .



**1.3 «Шарик и полусфера»** Еще более усложним задачу и рассмотрим небольшой шарик на легкой нерастяжимой нити, который лежит на полусфере (Рис. 3), слегка касаясь горизонтальной поверхности. Полусферу начинают двигать вправо с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Найдите скорость  $\vec{u}_3(x)$  шарика в процессе его скольжения по полусфере в момент времени, когда полусфера сместилась на расстояние  $x$  ( $x < R$ ). Опишите его траекторию на этом участке движения, укажите её существенные параметры. Считайте, что в процессе движения шарик не отрывается от полусферы. Радиус полусферы  $R$ .



Решение:

**Задание 9-2. «Двойное скольжение»**

**1.1 «Шарик и параллелепипед»** Поскольку движение параллелепипеда равномерное и прямолинейное, то логично предположить, что шарик также будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью  $\vec{u}_1$  под некоторым углом  $\alpha$  к горизонту.

В таком случае для нахождения скорости нет необходимости рассматривать малые промежутки времени  $\Delta t$ , а можно выбрать любой удобный конечный промежуток времени  $t$ .

Воспользуемся этим соображением и рассмотрим систему через промежуток времени  $t$ , когда параллелепипед сместился вправо на длину вертикальной стороны  $b$  (Рис. 01)

$$b = vt. \quad (1)$$

Поскольку нить нерастяжима, то при этом шарик поднялся по вертикальной стенке параллелепипеда до его вершины  $B$  (см. Рис. 01).

Следовательно, его перемещение  $AB$  (по модулю) составило гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника

$$AB = \sqrt{2}b. \quad (2)$$

Соответственно, искомая скорость  $\vec{u}_1$  шарика будет направлена вдоль гипотенузы  $AB$  (под углом  $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$  к горизонту) и равна по модулю

$$u_1 = \frac{AB}{t} = \frac{\sqrt{2}b}{b/v} = v\sqrt{2} = \sqrt{2}v. \quad (3)$$

Таким образом, траектория шарика будет представлять собой отрезок  $AB$ , также направленный под углом  $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$  к горизонту, длиной

$$AB = b\sqrt{2} = \sqrt{2}b. \quad (4)$$

Как следует из (4), сторона  $a$  параллелепипеда не влияет на решение данной задачи – она может быть любой. Эта сторона параллелепипеда играет существенную роль только при рассмотрении дальнейшего движения системы. :)

**1.2 «Шарик и наклонная плоскость»** Применяя те же общие рассуждения, что и в предыдущем пункте, делаем вывод, что и в этом случае шарик будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью  $\vec{u}_2$  под некоторым углом  $\beta$  к горизонту.

Соответственно, рассмотрим систему через промежуток времени  $t$ , когда наклонная плоскость сместилась вправо на свою длину  $l$  (Рис. 02)

$$l = vt. \quad (5)$$

Поскольку нить нерастяжима, то при этом шарик поднялся по наклонной плоскости до ее вершины  $D$  (см. Рис. 02).

Следовательно, его перемещение  $CD$  (по модулю) составило основание равнобедренного треугольника с углом  $\alpha$  при вершине

$$CD = 2l \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (6)$$

Соответственно, искомая скорость  $\vec{u}_2$  шарика будет направлена вдоль основания  $CD$  равнобедренного треугольника под углом  $\beta$  к горизонту

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2}. \quad (7)$$

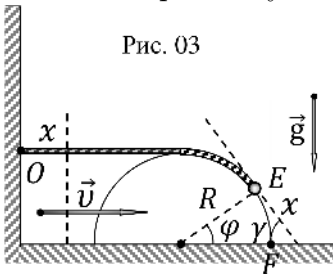
Модуль  $u_2$  скорости  $\vec{u}_2$  при этом будет

$$u_2 = \frac{CD}{t} = \frac{2l \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{l/v} = 2v \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (8)$$

Таким образом, траектория шарика будет представлять собой отрезок  $CD$ , направленный под углом  $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$  к горизонту, длиной

$$CD = 2l \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (9)$$

Интересно, что при  $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$  из (8) и (9) получаем формулы (3) и (4) из предыдущего пункта, поскольку вертикальную стенку параллелепипеда можно считать «наклонной плоскостью» с прямым углом. Физика рулит! :)



**1.3 «Шарик и полусфера»** Движение полусферы равномерное, следовательно, через промежуток времени  $t$  она пройдет по плоскости расстояние (Рис. 03)

$$x = vt. \quad (10)$$

В силу нерастяжимости нити шарик пройдет по полусфере такое же расстояние  $x$  и окажется в точке  $E$  (см. Рис. 03), причем длина дуги  $EF$  будет равна

$$\widetilde{EF} = x = vt = \varphi R. \quad (11)$$

Из (11) находим угол  $\varphi$

$$\varphi = \frac{x}{R} = \frac{vt}{R}. \quad (12)$$

Проведем касательную к полусфере в точке нахождения шарика в данный момент времени (см. Рис. 03). Она будет образовывать с горизонтом угол  $\gamma$ , который равен

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi. \quad (13)$$

Для мгновенного движения шарика маленький участок полусферы можно считать прямым участком движущейся наклонной плоскости, составляющей такой же угол  $\gamma$  с горизонтом. А это значит, что можно воспользоваться формулами (7) и (8) из предыдущего пункта задачи для наклонной плоскости, в которые вместо угла  $\alpha$  подставить угол  $\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi$ . Следовательно, модуль мгновенной скорости шарика  $u_3$  будет равен

$$u_3(\varphi) = 2v \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2v \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{2}\right) = 2v \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \quad (14)$$

или

$$u_3(x) = 2v \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2R}\right), \quad (15)$$

или

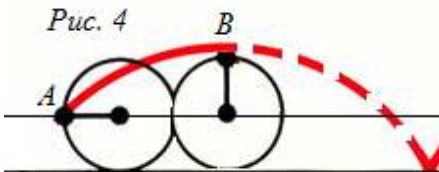
$$u_3(t) = 2v \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{vt}{2R}\right). \quad (16)$$

Скорость  $\vec{u}_3$  в данный момент будет направлена под углом к горизонту

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2R} = \frac{\pi}{4} + \frac{vt}{2R}. \quad (17)$$

В частности, в момент начала движения ( $\varphi = 0$ ) угол  $\delta = \frac{\pi}{4}$ , при этом шарик находится у практически вертикальной стенки полусферы, т.е. как в первом пункте задачи (с параллелепипедом). И там, действительно, угол был 45 градусов.

В данном пункте (это несложно обосновать), траекторией движения шарика будет участок  $AB$  циклоиды (Рис. 4), т.е. кривой, которую описывает в пространстве точка на ободе кольца, катящегося без проскальзывания по горизонтальной поверхности.



Существенными параметрами циклоиды являются высота арки циклоиды ( $h = 2R$ ) и расстояние ( $S = 2\pi R$ ) между точками касания поверхности качения.

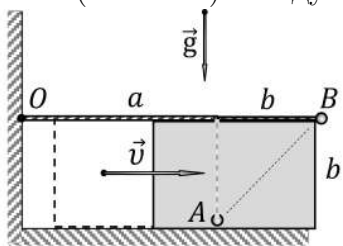


Рис. 01

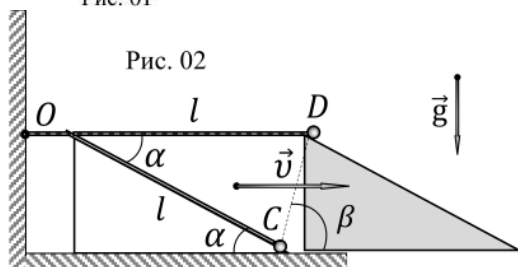


Рис. 02