

Решение

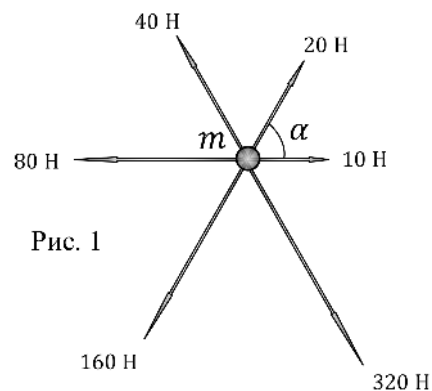


Рис. 1

Задание 10-1. Прогрессивная динамика

В данном задании действие силы тяжести не учитывать. Внимание! Рисунки носят качественный характер: реальные пропорции сил на них по понятным причинам не соблюдены.

1.1 На материальную точку массой $m = 36,4$ кг действуют шесть сил (Рис. 1), расположенных в одной плоскости, самая «маленькая» из которых равна $F_1 = 10$ Н и направлена вдоль оси Ox . Известно, что каждая следующая сила больше предыдущей в два раза и повернута на угол $\alpha = 60^\circ$ (см. Рис. 1). Найдите ускорение $\vec{a}_1$ материальной точки под действием данной системы сил.

1.2 Рассмотрим общий случай. Пусть на материальную точку массой m (Рис. 2) действует система из n сил ($\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \dots; \vec{F}_{n-1}; \vec{F}_n$), расположенных в одной плоскости на одинаковом угловом расстоянии $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ друг от друга. Известно, что модуль F_{i+1} каждой следующей силы в k раз больше модуля F_i предыдущей. Найдите ускорение $\vec{a}_2$ материальной точки под действием описанной системы сил.

1.3 Используя общее выражение, полученное для $\vec{a}_2$ в предыдущем пункте, вычислите ускорение $\vec{a}_1$ для первого пункта задачи.

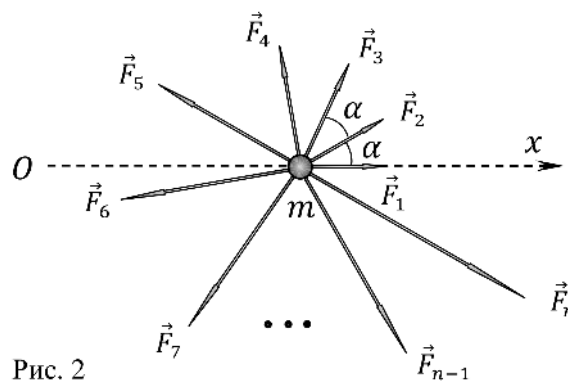


Рис. 2

Решение:

Задание 10-1. Прогрессивная динамика

1.1 Прямой метод решения предполагает нахождение проекции каждой из шести сил на соответствующую ось и дальнейшее суммирование проекций по каждой из осей.

Однако задачу можно решить проще (и короче!) если попарно сложить силы, противоположные по направлению.

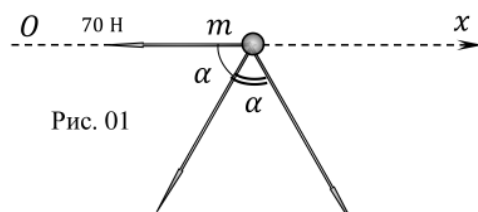


Рис. 01

Это упрощает систему до трех сил различной длины (Рис. 01), которые можно последовательно просуммировать по правилу параллелограмма.

После сложения сил 70 Н и 140 Н по теореме косинусов (Рис. 02) имеем

$$F_{12} = \sqrt{70^2 + 140^2 - 2 \cdot 70 \cdot 140 \cdot \cos 120^\circ} = \{185,2025918\}^1 = 185 \text{ Н.} \quad (1)$$

Для дальнейших вычислений нам потребуется угол β между вектором $\vec{F}_{12}$ и силой 140 Н (см. Рис. 02), который найдем по теореме синусов

$$\frac{70 \text{ Н}}{\sin \beta} = \frac{185 \text{ Н}}{\sin 120^\circ} \Rightarrow \beta = 19,1^\circ. \quad (2)$$

Далее аналогично (по правилу параллелограмма) складываем силы $\vec{F}_{12}$ и 280 Н, учитывая, что

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 101^\circ. \quad (3)$$

Опять же по теореме косинусов

$$F = \sqrt{185^2 + 280^2 - 2 \cdot 185 \cdot 280 \cdot \cos 101^\circ} = \{363,8582305\} = 364 \text{ Н.} \quad (4)$$

Для полного задания вектора необходимо не только найти его модуль (4), но и указать направление на плоскости. На практике для этого достаточно найти угол, образуемый данным вектором с какой либо осью или отрезком.

В нашем случае удобно найти угол φ (см. Рис. 02), образованный вектором равнодействующей $\vec{F}$ с осью Ox

$$\varphi = \alpha + \delta. \quad (5)$$

По теореме синусов для треугольника из второго параллелограмма имеем

$$\frac{185 \text{ Н}}{\sin \delta} = \frac{364 \text{ Н}}{\sin 101^\circ} \Rightarrow \delta = 29,9^\circ, \quad (6)$$

тогда

$$\varphi = 60^\circ + 29,9^\circ = 89,9^\circ = 90^\circ. \quad (7)$$

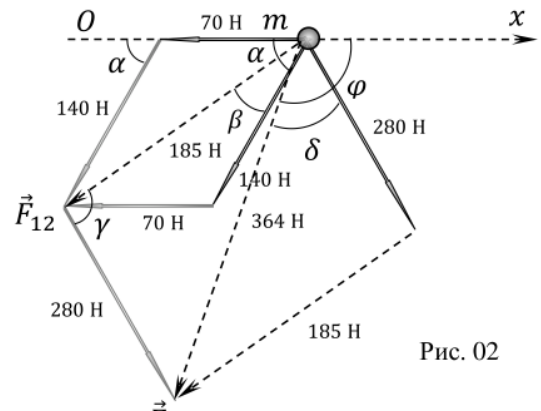


Рис. 02

Как следует из (7) вектор равнодействующей $\vec{F}$ практически перпендикулярен оси Ox , следовательно, согласно второму закону Ньютона, ускорение $\vec{a}_1$ материальной точки также будет практически перпендикулярно этой оси.

Заметим, что на Рис. 02 угол φ тупой, тогда как точные вычисления показывают, что он «немножечко острый». Тем не менее, даже такой «качественный» рисунок привел нас к цели.

—

¹ — здесь и далее: в фигурных скобках представлены (без размерности!) показания инженерного калькулятора (например, CASIO fx-991EX (CLASSWIZ)) при правильном расчёте.

Из основного закона динамики находим модуль a_1 ускорения материальной точки

$$a_1 = \frac{F}{m} = \frac{364}{36,4} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right) = 10 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right). \quad (8)$$

Интересно, что значение (8) для a_1 совершенно случайно «совпало» со значением g , используемом на централизованном тестировании ($\odot$), хотя в этом задании мы его не учитывали

$$a_1 = g_{\text{цт}} = 10 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right).$$

1.2 По определению равнодействующая $\vec{F}$ равна сумме всех сил, действующих на материальную точку

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n. \quad (9)$$

Заметим, что модули сил, действующих на материальную точку, образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Следовательно, для модуля силы F_n справедлива формула

$$F_n = F_1 \cdot k^{n-1}. \quad (10)$$

Кроме того, при геометрической прогрессии для любых соседних членов F_{i+1} и F_i выполняется равенство

$$\frac{F_{i+1}}{F_i} = k = \text{const.} \quad (11)$$

Для практического использования свойства (11) на векторной диаграмме (Рис. 02). умножим каждый вектор $\vec{F}_i$ на k (при этом он удлиниться в k раз) и повернём «удлиненную» систему сил как целое на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ против часовой стрелки (См. Рис. 03).

Из (11) следует, что после такой процедуры вектор $\vec{F}_1$ «превратился» в $\vec{F}_2$ и в точности «занял его место». Соответственно, вектор $\vec{F}_2$ «превратился» в $\vec{F}_3$ и в точности «занял его место» и т.д. Только последний вектор $\vec{F}_n$ «удлинился» в k раз и занял место «ушедшего» при повороте первого вектора $\vec{F}_1$. Соответственно, можно считать, что к старой системе сил после такой процедуры просто добавился вектор $kF_n - F_1$, ориентированный вдоль оси Ox .

Но, с другой стороны, из (9) следует, что результирующая сила $\vec{F}$ при этом увеличилась в k раз и также повернулась на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Изобразим все сказанное на векторной диаграмме (Рис. 03), образующей векторный треугольник.

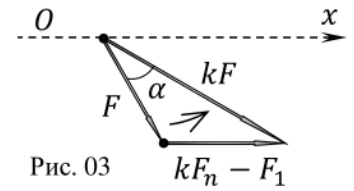


Рис. 03

Согласно теореме косинусов для треугольника можем записать

$$(kF_n - F_1)^2 = F^2 + (kF)^2 - 2F \cdot kF \cdot \cos \alpha. \quad (12)$$

С учетом (10) преобразуем (12) к виду

$$F_1^2(k^n - 1)^2 = F^2 + (kF)^2 - 2F \cdot kF \cdot \cos \alpha, \quad (13)$$

откуда находим

$$F = \frac{k^n - 1}{\sqrt{k^2 - 2k \cos \alpha + 1}} F_1 = \frac{k^n - 1}{\sqrt{k^2 - 2k \cos \left(\frac{2\pi}{n}\right) + 1}} F_1. \quad (14)$$

Для задания направления вектора $\vec{F}$ на плоскости найдем угол β из теоремы синусов

$$\frac{F_1(k^n - 1)}{\sin \alpha} = \frac{F}{\sin \beta} \implies \sin \beta = \frac{F \sin \alpha}{F_1(k^n - 1)} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{k^2 - 2k \cos \alpha + 1}}. \quad (15)$$

Тогда вектор $\vec{F}$ образует с осью Ox угол

$$\gamma = \alpha + \beta = \frac{2\pi}{n} + \beta. \quad (16)$$

Выражения (14) – (16) полностью задают равнодействующую силу $\vec{F}$ для данной системы сил.

Согласно второму закону Ньютона ускорение материальной точки будет также направлено под углом γ к оси Ox и равно

$$a_2 = \frac{F}{m} = \frac{k^{n-1}}{\sqrt{k^2 - 2k \cos(\frac{2\pi}{n}) + 1}} \frac{F_1}{m}. \quad (17)$$

1.3 Для вычислений с использованием (14) – (16) из условия задачи найдем необходимые параметры: $n = 6$; $k = 2$. После подстановки получаем

$$a_1 = \frac{2^6 - 1}{\sqrt{2^2 - 2 \cdot 2 \cos(\frac{2\pi}{6}) + 1}} \frac{10}{36,4} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right) = \{9,992600813\} = 10 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right), \quad (18)$$

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{2^2 - 2 \cdot 2 \cos(\frac{2\pi}{6}) + 1}} \right) = \frac{\pi}{6} = 30^\circ. \quad (19)$$

Следовательно,

$$\gamma = \frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ. \quad (20)$$

Согласно (20) вектор $\vec{a}_2$ перпендикулярен оси Ox .

Сравнивая (18) и (20) с (7) и (8) констатируем полное совпадение ответов (с учетом малых погрешностей округления) и в очередной раз убеждаемся в справедливости старой истины: «Все правильные решения, в отличие от неправильных, ведут к одному и тому же ответу»!
:)