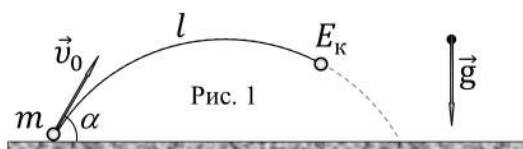


Решение

Задание 10-2. Энергичный бросок

Зад:

Небольшой камешек массой m поверхности (Рис. 1) с некоторой на



Небольшой камешек массой m бросили под некоторым углом α к горизонтальной поверхности (Рис. 1) с некоторой начальной скоростью $\vec{v}_0$. Зависимость кинетической энергии E_k камешка (см. Рис. 1) от пройденного им пути l в процессе полёта представлена на Рис. 2 в безразмерных координатах E_k/E_0 и l/l_0 (где E_0 и l_0 — некоторые размерные масштабные множители).

Сопротивлением воздуха при движении камешка пренебречь. Ускорение свободного падения g .

Часть 1. «Только формулы» В этой части задачи Вам предстоит самое простое: вывести формулы для различных физических параметров системы через известные величины: m , E_0 , g .

1.1 Найдите кинетические энергии камешка: E_1 — в момент бросания, E_2 — в верхней точке траектории, E_3 — при падении на землю.

1.2 Определите начальную скорость v_0 камешка при броске.

1.3 Получите формулу для определения угла α , под которым камешек бросили к горизонту.

1.4 Выведите формулу для времени полета t_{π} камешка.

1.5 Найдите максимальную высоту h_{max} и дальность S полета камешка при таком броске.

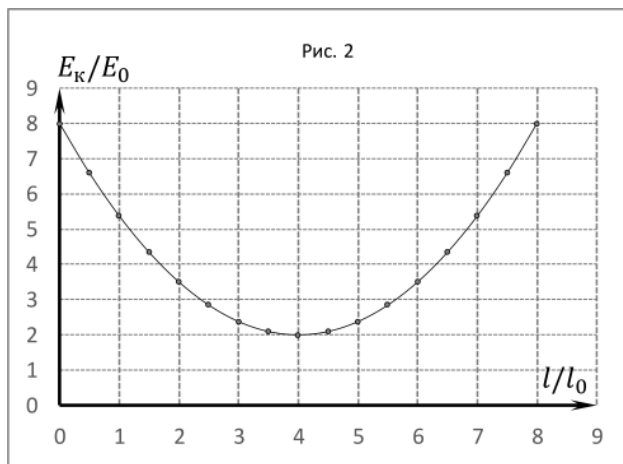
Часть 2. «Только расчёты» В этой части задачи Вам предстоит самое сложное — вычислить значения физических параметров системы по формулам, полученным в первой части. При расчетах примите: $m = 1,00$ кг, $E_0 = 10,0$ Дж, $g = 9,81$ м/с².

2.1 Вычислите значения всех физических параметров системы из пунктов 1.1 – 1.4.

2.2 Вычислите максимальную высоту h_{max} и дальность S полета камешка из пункта 1.5. Получите численное уравнение $y(x)$ траектории камешка, схематически её постройте. Как можно точнее оцените длину траектории l_{max} камешка.

2.3 Определите численное значение размерного масштабного множителя l_0 .

Решение:



Часть 1. «Только формулы»

1.1 В момент бросания путь, пройденный камешком, равен нулю ($l/l_0 = 0$), что соответствует начальной точке A графика (Рис 10). Следовательно

$$E_1 = 8E_0. \quad (1)$$

Поскольку камешек бросают вдоль горизонтальной поверхности и сопротивлением воздуха можно пренебречь, то по закону сохранения энергии, в конечной точке траектории (при приземлении $l/l_0 = 8$) его кинетическая энергия E_3 будет иметь такое же значение, как и при старте (точка C на Рис. 10)

$$E_3 = E_1 = 8E_0. \quad (2)$$

В верхней точке траектории по закону сохранения энергии потенциальная энергия имеет максимальное значение, а кинетическая энергия E_2 , соответственно – минимальное (точка B на Рис. 10). Минимум функции на Рис. 10 соответствует точке B с абсциссой $l/l_0 = 4$ (половина пройденного пути) и ординатой $E_k/E_0 = 2$. Следовательно

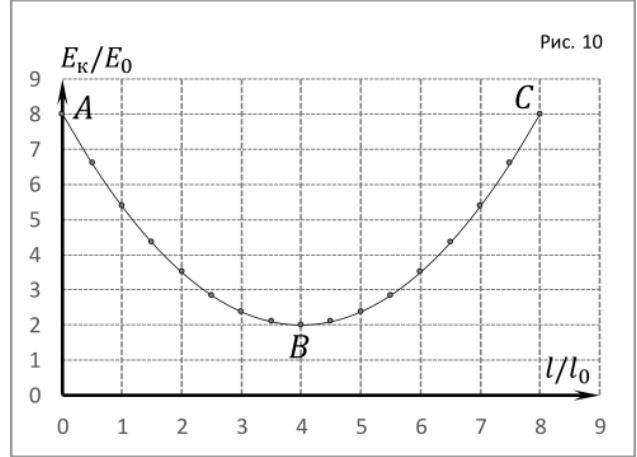
$$E_2 = 2E_0. \quad (3)$$

1.2 Начальную скорость камешка найдем, зная E_1

$$E_1 = \frac{mv_0^2}{2} \implies v_0 = \sqrt{\frac{2E_1}{m}} = \sqrt{\frac{16E_0}{m}} = 4\sqrt{\frac{E_0}{m}}. \quad (4)$$

1.3 В верхней точке траектории кинетическая энергия камешка определяется только горизонтальной проекцией $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ его начальной скорости. Следовательно

$$E_2 = \frac{mv_{0x}^2}{2} = \frac{mv_0^2(\cos \alpha)^2}{2} = E_1(\cos \alpha)^2 \implies \cos \alpha = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} = \frac{1}{2}. \quad (5)$$



1.4 Для вычисления времени полёта камешка необходимо найти синус угла его бросания

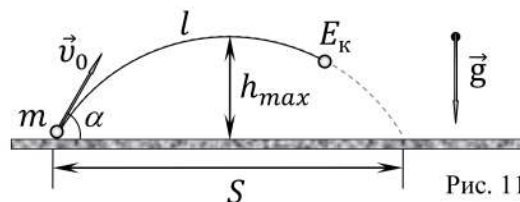
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - (\cos \alpha)^2} = \{(5)\} = \sqrt{1 - \frac{E_2}{E_1}} = \sqrt{\frac{E_1 - E_2}{E_1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (6)$$

Далее используем известную формулу для времени полёта при бросании вдоль горизонтальной поверхности

$$t_{\pi} = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \{(4), (6)\} = \frac{2}{g} \sqrt{\frac{2E_1}{m}} \cdot \sqrt{\frac{E_1 - E_2}{E_1}} = \frac{2\sqrt{2(E_1 - E_2)}}{g \sqrt{\frac{m}{E_1}}} = \frac{4\sqrt{E_1 - E_2}}{g \sqrt{m}} = \frac{4\sqrt{3E_0}}{g \sqrt{m}}. \quad (7)$$

1.5 Максимальную высоту подъёма камешка h_{max} найдём из закона сохранения механической энергии (Рис. 11)

$$\frac{mv_0^2}{2} = E_1 = E_2 + mgh_{max} \implies h_{max} = \frac{E_1 - E_2}{mg} = \frac{6E_0}{mg}. \quad (8)$$



Дальность полёта камешка найдём из условия его равномерного движения по горизонтали за известное время

$$S = v_{0x} \cdot t_{\pi} = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} 2 \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \cdot \sqrt{\frac{E_1 - E_2}{E_1}} = \frac{4}{mg} \sqrt{E_2(E_1 - E_2)} = \frac{8\sqrt{3}E_0}{mg}. \quad (9)$$

Часть 2. «Только расчёты»

2.1 Проведем необходимые вычисления с учетом правила сохранения трёх значащих цифр (столько задано в условии).

$$E_1 = 8E_0 = 80,0 \text{ Дж}, \quad E_3 = E_1 = 8E_0 = 80,0 \text{ Дж}, \quad E_2 = 2E_0 = 20,0 \text{ Дж}; \quad (10)$$

$$v_0 = 4\sqrt{\frac{E_0}{m}} = 12,6 \text{ м/с}; \quad (11)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} = \frac{1}{2} \implies \alpha = 60,0^\circ = \frac{\pi}{3}. \quad (12)$$

$$t_{\pi} = \frac{4}{g} \sqrt{\frac{3E_0}{m}} = 2,23 \text{ с.} \quad (13)$$

2.2 Проведем вычисления с учетом правила сохранения количества значащих цифр

$$h_{max} = \frac{6E_0}{mg} = 6,12 \text{ м}, \quad (14)$$

$$S = \frac{8\sqrt{3}E_0}{mg} = 14,1 \text{ м.} \quad (15)$$

Уравнение траектории камешка $y(x)$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз, а её вершина сдвинута вправо на $\frac{S}{2}$ и приподнята на h_{max} . Соответственно, её уравнение будет иметь вид

$$y(x) = -a \left(x - \frac{S}{2} \right)^2 + h_{max}, \quad (16)$$

где постоянная $a = \frac{4h_{max}}{S^2} = 0,123 \text{ м}^{-1}$ определяет «крутизну» ветвей параболы.

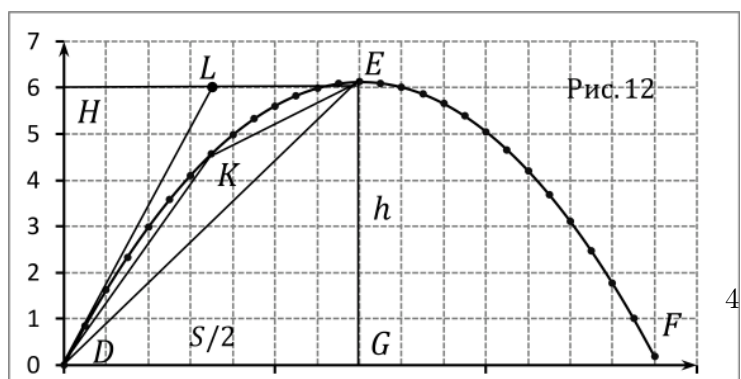
Подставляя в (16) численные значения (14) и (15), получим численное уравнение траектории камешка

$$y(x) = (-0,123 \cdot (x - 7,05)^2 + 6,12)(\text{м}), \quad (17)$$

определённое на участке $[0; 14,1]$. Далее обозначим $h_{max} = h$.

Таким образом, нам необходимо как можно точнее найти длину l_{max} параболы, заданной уравнением (17).

Схематически изобразим зависимость (17) на графике (Рис. 12), где все измеряем в метрах. Оценим длину кривой DEF методом границ, последовательно находя её с недостатком и избытком, постепенно сужая границы.



В первом приближении поступим предельно просто: заменим половину параболы сначала хордой DE , а затем половиной периметра прямоугольника

$DHEG$ (см. Рис. 12).

Как следует из рисунка, длина половины параболы $DE = \frac{l_{max}}{2}$ больше длины гипотенузы DE прямоугольного треугольника DEG (нижняя граница)

$$DE = \sqrt{(S/2)^2 + h^2} = 9,34 \text{ м}, \quad (18)$$

но меньше суммы сторон DH и HE прямоугольника $DHEG$ (верхняя граница)

$$\sqrt{(S/2)^2 + h^2} < \frac{l_{max}}{2} < \frac{S}{2} + h. \quad (19)$$

В численных значениях это даёт (далее все измеряем в метрах)

$$9,34 < \frac{l_{max}}{2} < 13,17. \quad (20)$$

Возьмем среднее арифметическое нижней и верхней границы, тогда в первом приближении для длины траектории получаем

$$l_{max} = 2 \frac{9,34 + 13,17}{2} = 22,5 \text{ м}. \quad (21)$$

В качестве погрешности Δl_{max} первого приближения возьмем половину интервала между границами

$$\Delta l_{max} = \frac{13,17 - 9,34}{2} = 1,9. \quad (22)$$

Окончательно для первого приближения находим (все измеряли в метрах)

$$l_{max} = (22,5 \pm 1,9) \text{ м}, \quad \varepsilon = 8,4 \%. \quad (23)$$

Для второго приближения длины траектории l_{max} выберем точку K примерно на середине (по абсциссе) восходящей ветви параболы (см. Рис. 12). Новая нижняя граница будет равна сумме длин отрезков $DK = \sqrt{3,5^2 + 4,5^2} = 5,70$ и $KE = \sqrt{3,5^2 + 15^2} = 3,81$.

Далее проведем касательную к параболе в начальной точке D (см. Рис. 12) и найдем точку L её пересечения с отрезком HE . Тогда новая верхняя граница оценки будет равна сумме длин отрезков $DL = \sqrt{3,5^2 + 6,0^2} = 6,95$ и $LE = 3,5$.

В численных значениях (далее все измеряем в метрах) для второго приближения получаем

$$9,51 < \frac{l_{max}}{2} < 10,45. \quad (24)$$

Возьмем среднее арифметическое нижней и верхней границы, тогда во втором приближении для длины траектории получаем

$$l_{max} = 2 \frac{9,51 + 10,45}{2} = 20,0 \text{ м.} \quad (25)$$

В качестве погрешности второго приближения возьмем половину интервала между границами

$$\Delta l_{max} = \frac{10,45 - 9,51}{2} = 0,47 \approx 0,5. \quad (26)$$

Окончательно для второго приближения находим

$$l_{max} = (20,0 \pm 0,5) \text{ м, } \varepsilon = 2,5 \%. \quad (27)$$

Как видим из сравнения (27) и (23), точность второго приближения выросла в разы, поскольку относительная погрешность ε при этом уменьшилась более, чем в три раза.

Понятно, что продолжая эту процедуру далее, т.е. добавляя на середине каждого отрезка новые точки деления и проводя новые касательные к концам дуг, мы будем получать все более и более точные ($\varepsilon \rightarrow 0$) оценки для длины параболы.

При достаточно большом числе разбиений ($N \rightarrow \infty$) будет получено точное значение l_{max} длины параболы между точками бросания и приземления камешка.

Можно показать (от школьников не требуется), что точное значение длины дуги функции $f(x)$ на участке $[0; S]$ даётся определённым интегралом

$$l_{max} = \int_0^S \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad (28)$$

где $f'(x)$ – производная от рассматриваемой функции. В данном случае $f(x)$ – парабола (17), а её производная: $f'(x) = (-0,246x + 1,7343)$.

В нашем случае несколько громоздкое интегрирование (28) приводит к окончательному результату

$$l_{max} = 2h\sqrt{1 + \xi^2} + \frac{S}{2}\xi \cdot \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \xi^2}}{\xi} \right), \quad (29)$$

где безразмерный параметр ξ равен $\xi = \frac{S}{4h}$.

Для полученной траектории ($\xi = 0,576$; $h = 6,12$ м; $S = 14,1$ м) расчет по формуле (29) даёт значение для длины траектории

$$l_{max} = 19,48 \text{ м.} \quad (30)$$

Заметим, что современные инженерные калькуляторы, которыми разрешено пользоваться на олимпиаде, позволяют вычислить интеграл (28) непосредственно методом Гаусса – Кронрода

$$l_{max} = \int_0^{14,1} \sqrt{1 + (-0,246x + 1,7343)^2} dx = 19,47 \text{ м.} \quad (31)$$

Как видим из (30) и (31), и аналитическое, и численное интегрирование с точностью до трёх значащих цифр приводят к одному и тому же результату, который условимся считать «точным» значением искомой величины в рамках нашей задачи

$$l_{max} = 19,5 \text{ м.} \quad (32)$$

Как следует из сравнения (32) и (27), «точный» результат для длины l_{max} траектории камешка попал в интервал оценки (правда, на самый краешек...) уже на втором шаге (при втором приближении), что весьма неплохо для выбранного приближенного метода оценки.

Логично ожидать, что следующее (третье) приближение (с двумя точками привязки на параболу) позволит вычислить искомую длину траектории с еще большей точностью (меньшей относительной погрешностью).

Учитывая, что время олимпиады ограничено, а вывод точной формулы (29) от школьников не требуется, можно считать достаточно успешным выполнение даже двух приближений с получением результатов, близких к (27). При этом «точное» значение (32) должно попасть в интервал оценки.

Таким образом, простые идеи и вычислительная настойчивость позволяют с неплохой точностью вычислять сложные суммы.

2.3 Зная длину траектории (27), находим искомое значение безразмерного параметра l_0

$$l_{max} = 8l_0 \implies l_0 = \frac{l_{max}}{8} = \frac{20,0}{8} \text{ м} = 2,50 \text{ м.} \quad (33)$$

Заметим, что если в качестве l_{max} использовать «точное» значение (32), то ответ несколько уточнится

$$l_0 = \frac{l_{max}}{8} = \frac{19,5}{8} \text{ м} = 2,44 \text{ м.} \quad (34)$$