

Решение

Задание 10-3. Цикл Карно

В современном мире успешно работают миллионы машин, основная часть которых использует как бензиновые, так и дизельные двигатели внутреннего сгорания (ДВС). Доля электромобилей на мировом рынке в настоящий момент крайне невелика — около 2 %.



Рис. 1

При создании ДВС в середине XIX века перед инженерами и конструкторами встал важный прикладной (и научный!) вопрос: а какой тепловой двигатель имеет максимальный термодинамический КПД, т.е. является идеальной тепловой машиной?

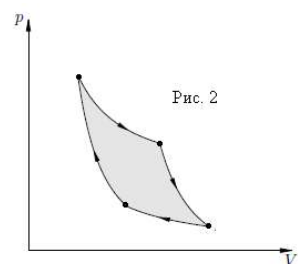
Заметим, что цикл Отто (бензиновый двигатель) и цикл Дизеля (дизельный двигатель) не являются идеальными тепловыми циклами, хотя автомобили, работающие по этим циклам, и составляют львиную долю современного производства. Так что же, наша цивилизация так глупа?

Впервые идеальная тепловая машина была описана в 1824 г. французским физиком и инженером Сади Карно (Рис. 1) в скромной работе «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу». Заметим, что эта сравнительно небольшая работа содержала «всего лишь» 65 страниц, 5 поясняющих рисунков и 2 теоремы.

Интересно, что сам автор так и не счел необходимым изобразить графически свой знаменитый цикл (Рис. 2), известный сегодня каждому школьнику, он привёл только его точные описания ...

С. Карно был талантливым учеником известного математика и физика Семиона Дени Пуассона, который в 1823 г. впервые получил уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона) и предложил тему дальнейшего перспективного исследования молодому Карно.

Интуиция и предчувствия не подвели Пуассона – пионерская работа активного Карно со временем стала фундаментальной, принесла автору мировую известность и положила начало новому разделу физики – термодинамике.



Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: если $a^n b^m = \text{const}$, то при малых Δa и Δb ($\Delta a \ll a$, $\Delta b \ll b$) справедливо равенство: $n \frac{\Delta a}{a} + m \frac{\Delta b}{b} = 0$ (справедливо также и обратное утверждение); затонированная площадь S (Рис. 3) под гиперболой $y = \frac{k}{x}$ вычисляется через натуральный логарифм по формуле $S = k \cdot \ln \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$, молярная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль $\cdot$ К).

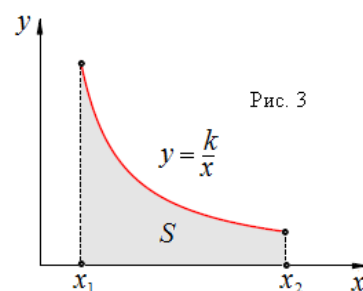


Рис. 3

Часть 1. Адиабатный процесс

Термодинамический процесс, проводимый без теплообмена ($Q = 0$) с окружающей средой (т.е. в теплоизолированной системе), называется *адиабатным* процессом. Адиабатными являются многие быстропротекающие процессы (взрыв, быстрое расширение (сжатие) газа, распространение звуковой волны), процесс подъема теплого воздуха с поверхности земли с последующим охлаждением, конденсацией пара и образованием облаков и т.д.

1.1 Теплоёмкость c^M идеального газа, взятого в количестве $\nu = 1$ моль ($m = M$), называется молярной теплоёмкостью. Найдите молярную теплоёмкость c_V^M идеального одноатомного газа при изохорном процессе, т.е. при постоянном объёме ($V = \text{const}$). Запишите формулу для

внутренней энергии U идеального одноатомного газа через c_V^M и в дальнейшем используйте её для любого идеального газа.

1.2 Выразите молярную теплоемкость идеального газа c_p^M при постоянном давлении ($p = \text{const}$), т.е. при изобарном процессе, через c_V^M .

1.3 Получите уравнение адиабатного процесса для произвольного идеального газа в переменных (T, V) с показателем адиабаты $\gamma = \frac{c_p^M}{c_V^M}$.

1.4 В полученном уравнении сделайте замену переменных и запишите уравнение адиабатного процесса для произвольного идеального газа в «традиционном» виде, т.е. в переменных (p, V) .

1.5 Схематически изобразите на одной (p, V) – диаграмме ход адиабаты и изотермы идеального газа. Кратко охарактеризуйте особенности построенных графиков.

Часть 2. Идеальный цикл (цикл Карно)

Карно доказал, что идеальная тепловая машина, реализующая η_{max} максимальный термодинамический КПД при заданных температурах нагревателя T_1 и холодильника T_2 ($T_1 > T_2$), должна работать по обратимому циклу (Рис. 4), состоящему из двух изотерм и двух адиабат (вторая теорема Карно).

Более того, η_{max} для цикла Карно не зависит от типа рабочего тела (т.е. не важно, какой именно идеальный газ используется!). Он определяется только температурами нагревателя T_1 и холодильника T_2 (первая теорема Карно).

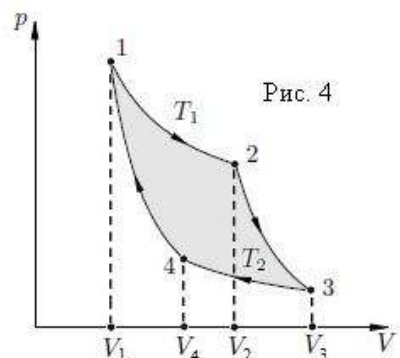


Рис. 4

При идеальном цикле изотерма $1 \rightarrow 2$ осуществляется при большей температуре T_1 , далее следует адиабатный переход $2 \rightarrow 3$, изотерма $3 \rightarrow 4$ при меньшей температуре T_2 и, наконец, адиабатное возвращение $4 \rightarrow 1$ к начальной точке цикла (см. Рис. 4). Величины T_1 , T_2 , V_1 , V_2 , V_3 , V_4 для цикла Карно считайте известными.

2.1 Докажите «правило объемов» для цикла Карно, согласно которому произведение «крайних» объемов равно произведению «средних»: $V_1 V_3 = V_2 V_4$.

2.2 Докажите «правило адиабатных площадей» для данного цикла, которое утверждает, что площади S_{23} и S_{41} под адиабатами $2 \rightarrow 3$ и $4 \rightarrow 1$ на (p, V) – диаграмме цикла Карно (Рис. 5) одинаковы: $S_{23} = S_{41}$.

2.3 Найдите количество теплоты Q_1 , полученной идеальным газом от нагревателя, и количество теплоты Q_2 , отданной им холодильнику.

2.4 Выведите формулу для максимального термодинамического КПД η_{max} цикла Карно, осуществляемого при данных температурах нагревателя T_1 и холодильника T_2 .

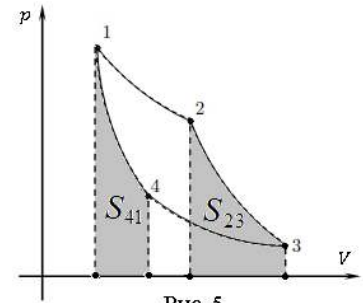


Рис. 5

Возможные решения:

Часть 1. Адиабатный процесс

1.1 Внутренняя энергия идеального одноатомного газа вычисляется по формуле

$$U = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT = \frac{3}{2} \nu RT. \quad (1)$$

Поскольку при изохорном процессе ($V = const$) работа газом не совершается, то при нагревании идеального одноатомного газа на ΔT увеличится только его внутренняя энергия на ΔU

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T. \quad (2)$$

С другой стороны, согласно условию, можем записать

$$\Delta U = c_V^M \nu \Delta T. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), находим молярную теплоёмкость идеального одноатомного газа при постоянном объёме

$$c_V^M = \frac{3}{2} R. \quad (4)$$

Заметим, что двухатомного идеального газа при комнатных температурах $c_V^M = \frac{5}{2}R$, для трёхатомного $c_V^M = \frac{6}{2}R$ и далее она монотонно возрастает в зависимости от числа атомов и особенностей (температуры) изохорного процесса.

Используя (4) и (1), запишем внутреннюю энергию U любого идеального газа в общем виде

$$U = c_V^M \nu T = \nu c_V^M T. \quad (5)$$

1.2 Согласно первому началу термодинамики при произвольном процессе количество теплоты ΔQ , сообщенное газу, идет на изменение его внутренней энергии ΔU и совершение газом работы $\Delta A = p\Delta V$

$$\Delta Q = \Delta U + p\Delta V. \quad (6)$$

Рассмотрим два близких состояния системы (p, V) и $(p+\Delta p, V+\Delta V)$. Из уравнения состояния идеального газа в форме Клапейрона – Менделеева для этих изобарных состояний можем записать

$$\begin{aligned} pV &= \nu R\Delta T \\ p(V + \Delta V) &= \nu R(T + \Delta T). \end{aligned} \quad (7)$$

Вычитая уравнения, из (7) найдем

$$p\Delta V = \nu R\Delta T. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), с учетом (3) получим для изобарного процесса

$$\Delta Q = c_V^M \nu \Delta T + \nu R\Delta T. \quad (9)$$

Теперь, по определению, легко находим молярную теплоёмкость идеального газа при постоянном давлении

$$c_p^M = \frac{\Delta Q}{\nu \Delta T} = \frac{c_V^M \nu \Delta T + \nu R\Delta T}{\nu \Delta T}. \quad (10)$$

После сокращения на $\nu \Delta T$, окончательно получаем, что для произвольного идеального газа справедливо равенство

$$c_p^M = c_V^M + R. \quad (11)$$

Уравнение (11) было получено в 1842 г. немецким естествоиспытателем и очень внимательным медиком (!) Р. Майером, который первым заметил различия в цвете крови (!!) на экваторе и в средних широтах. Где кровь, а где термодинамика ...? :)

Таким образом, согласно уравнению Майера, молярная газовая постоянная R (см. размерность) даёт разность между молярными теплоемкостями идеального газа при различных процессах: изобарным и изохорным.

1.3 По определению адиабатный процесс осуществляется в теплоизолированной термодинамической системе, т.е. без теплообмена ($Q = 0$) с окружающей средой, следовательно, первое начало термодинамики для него примет вид

$$Q = 0 = \Delta U + A. \quad (12)$$

Из (12) следует, что малая работа ΔA идеального газа при малом объемном расширении на ΔV совершается только за счет убыли его внутренней энергии (притока теплоты нет)

$$\Delta A = p\Delta V = -\Delta U. \quad (13)$$

С учетом (5) перепишем (13) в виде

$$p\Delta V = -\Delta U = -\nu c_V^M \Delta T. \quad (14)$$

Выразим давление идеального газа из уравнения Клапейрона – Менделеева

$$pV = \nu RT \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\nu RT}{V}. \quad (15)$$

С учетом (15) выражение (14) примет вид

$$\frac{\nu RT}{V} \Delta V = -\nu c_V^M \Delta T \quad \Rightarrow \quad -\frac{R}{c_V^M} \cdot \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}. \quad (16)$$

Перепишем (16) в «удобном» виде, чтобы воспользоваться математической подсказкой из условия задачи

$$\frac{\Delta T}{T} + \frac{R}{c_V^M} \cdot \frac{\Delta V}{V} = 0. \quad (17)$$

Теперь, с учетом математической подсказки из условия задачи, можем заключить, что справедливо равенство

$$TV^{\frac{R}{c_V^M}} = TV^{\gamma-1} = \text{const.} \quad (18)$$

Поскольку $\frac{R}{c_V^M} = \gamma - 1$, то окончательно получим

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.}$$

где $\gamma = 1 + \frac{R}{c_V^M} = \frac{c_V^M + R}{c_V^M} = \frac{c_p^M}{c_V^M} > 1$ – показатель адиабаты Пуассона.

Несмотря на то, что уравнение адиабатного процесса в виде (18) легче выводится, чаще (с подачи самого Пуассона) оно используется в выражении через переменные (p, V) .

1.4 Перепишем уравнение адиабаты для идеального газа в наиболее распространенном, «классическом» виде, которое использовал Пуассон, т.е. в переменных (p, V) .

Для замены переменных из (15) выразим температуру T и подставим в (18)

$$pV = \nu RT \implies T = \frac{pV}{\nu R} \implies \frac{pV}{\nu R} V^{\gamma-1} = \text{const} \implies pV^\gamma = \text{const}^*. \quad (19)$$

Следовательно, уравнение адиабатного процесса (Пуассона) для произвольного идеального газа в параметрах $(p; V)$ можно записать в виде

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (20)$$

где показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_p^M}{c_v^M} > 1$.

1.5 Выразим зависимость давления от объема $p(V)$ идеального газа при изотермическом процессе

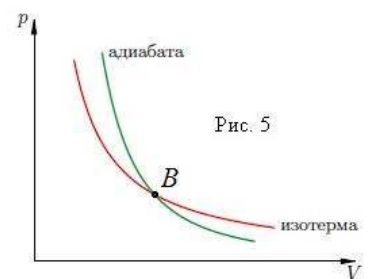
$$p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{\text{const}_1}{V}, \quad (21)$$

и при адиабатном процессе

$$p = \frac{\text{const}_2}{V^\gamma}. \quad (22)$$

Поскольку $\gamma > 1$, то из (21) и (22) следует, что с ростом объема V идеального газа на (p, V) – диаграмме адиабата убывает «быстрее», чем изотерма. Можно сказать и по другому: на (p, V) – диаграмме адиабата идет «круче», чем изотерма, поэтому у них обязательно будет точка пересечения B (Рис. 5).

Соответственно, после точки пересечения графиков (см. Рис. 5), при $V \rightarrow \infty$ адиабата всегда прижимается «ближе» к оси абсцисс (объемов), т.е. как бы «ныряет» под изотерму.



Часть 2. Идеальный цикл (Цикл Карно)

2.1 Для доказательства «правила объемов» используем условие замкнутости цикла Карно и запишем уравнения всех процессов идеального газа (изотерм и адиабат) по ходу цикла

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= p_2 V_2 \\ p_2 V_2^\gamma &= p_3 V_3^\gamma, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} p_3 V_3 &= p_4 V_4 \\ p_4 V_4^\gamma &= p_1 V_1^\gamma. \end{aligned} \quad (24)$$

Перемножив все уравнения (23) и (24), получим «длинное» равенство

$$p_1 V_1 \cdot p_2 V_2^\gamma \cdot p_3 V_3 \cdot p_4 V_4^\gamma = p_2 V_2 \cdot p_3 V_3^\gamma \cdot p_4 V_4 \cdot p_1 V_1^\gamma, \quad (25)$$

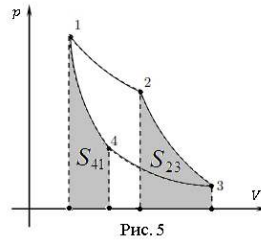
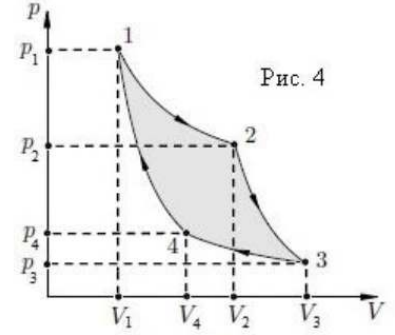
которое, после сокращений, даёт

$$V_2^{\gamma-1} V_4^{\gamma-1} = V_3^{\gamma-1} V_1^{\gamma-1}. \quad (26)$$

Из (26), после извлечения корня $(\gamma-1)$ степени, следует искомое равенство (произведение «крайних» объемов равно произведению «средних»)

$$V_1 V_3 = V_2 V_4. \quad (27)$$

Интересно, что «правило объемов» будет также справедливо и для любых замкнутых политропических циклов вида $pV^n = \text{const}$, поскольку результат (27) не зависит от γ .



2.2 Рассмотрим адиабаты $2 \rightarrow 3$ и $4 \rightarrow 1$ цикла Карно. При адиабатном расширении $2 \rightarrow 3$ работа газа A_{23} положительна ($V_3 > V_2$) и равна затонированная площади S_{23} под адиабатой

$$S_{23} = A_{23}. \quad (28)$$

С другой стороны, система теплоизолирована, поэтому из первого начала термодинамики следует, что эта работа равна разности внутренних энергий газа в начальном и конечном состояниях (на верхней и нижней изотермах, газ при этом остывает)

$$S_{23} = A_{23} = -\Delta U_{23} = \nu c_V^M (T_1 - T_2), \quad (29)$$

где $c_V^M = \frac{R}{\gamma-1}$ для данного идеального газа.

Аналогично, при адиабатном сжатии $4 \rightarrow 1$ модуль работы A_{41} газа равен площади под графиком (она отрицательна ($V_1 < V_4$))

$$S_{41} = |A_{41}|. \quad (30)$$

Работа газа при этом также равна разности энергий на тех же изотермах (газ при этом нагревается, поскольку его сжимают)

$$-S_{41} = A_{41} = -\Delta U_{41} = -\nu c_V^M (T_1 - T_2) = -A_{23}. \quad (31)$$

Из (29) и (31) следует, что на (p, V) – диаграмме цикла Карно затонированные на Рис. 5 площади под адиабатами равны

$$S_{23} = S_{41}. \quad (32)$$

2.3 Для нахождения количества теплоты Q_1 , полученной газом от нагревателя с температурой T_1 , рассмотрим изотермическое расширение $1 \rightarrow 2$ цикла Карно (Рис. 6).

При таком процессе, согласно первому началу термодинамики

$$Q_1 = A_{12}, \quad (33)$$

а зависимость давления от объема является гиперболической

$$p(V) = \frac{\nu RT_1}{V} = \frac{const}{V}. \quad (34)$$

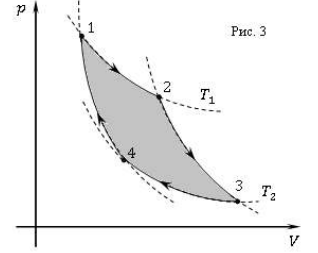
Как следует из математической подсказки, работа газа при таком процессе положительна ($V_2 > V_1$) и равна площади под гиперболой (см. Рис. 6)

$$Q_1 = A_{12} = \nu RT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right). \quad (35)$$

Аналогично заметим, что при изотермическом сжатии $3 \rightarrow 4$ работа газа будет отрицательна ($V_4 < V_3$) и количество теплоты Q_2 , отданное холодильнику равна

$$Q_2 = A_{34} = \nu RT_2 \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right) = -\nu RT_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right). \quad (36)$$

2.4 По определению термодинамический КПД цикла равен



$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\nu RT_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right)}{\nu RT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)}. \quad (37)$$

Из правила объёмов (27) следует, что

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} \implies \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right) = \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right). \quad (38)$$

С учетом (38) можем сократить натуральные логарифмы в (37), и получим знаменитую формулу для максимального КПД идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (37)$$

Как видим из (37), КПД идеальной тепловой машины η_{max} определяется только температурами нагревателя и холодильника (т.н. «тепловых резервуаров»). Он не зависит от показателя адиабаты (т.е. вида газа или рода рабочего тела), степени расширения (сжатия) газа и т.д.

Однако практическое использование цикла Карно (как и всего идеального!) не представляется возможным – требования равновесности и обратимости процессов цикла увеличивают время проведения цикла до бесконечности и сводят на ноль его полезную

мощность! Так что цивилизация не так уж и глупа: лучше иметь двигатель с меньшим КПД, но с большей полезной (используемой) мощностью. Лучше синица в руках, чем журавль в небе... :)