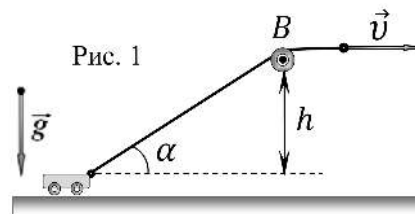


Решение

Задание 11-2. Ускорение. Сила. Мощность

1. Небольшую тележку (Рис. 1) массой $m = 0,35$ кг подтягивают легкой нерастяжимой нитью к неподвижному блоку B по горизонтальной поверхности. Известно, что механизм (например, лебёдка) вытягивает нить с постоянной скоростью v . Найдите ускорение a тележки в момент, когда нить образует угол α с горизонтом (см. Рис. 1). Блок расположен на высоте h от горизонтальной поверхности. Известно, что при движении тележка не отрывается от горизонтальной поверхности.



2. Найдите силу натяжения T нити в данный момент. Трением и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

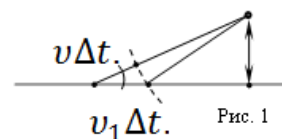
3. Найдите мощность P , развиваемую лебедкой в данный момент.

4. Вычислите по полученным формулам ускорение a , силу T , мощность P при следующих значениях параметров системы: $\alpha = 35^\circ$, $h = 1,0$ м, $v = 1,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Решение:

1. Для нахождения мгновенной скорости тележки $u(\alpha)$ используем метод малых перемещений.

Пусть за малый промежуток времени Δt тележка сместится вправо по горизонтали на расстояние $u\Delta t$. При этом длина нити уменьшится на величину $v\Delta t$. Из соответствующего прямоугольного треугольника получаем (на Рис. $u = v_1$)



$$v\Delta t = u\Delta t \cos \alpha. \quad (1)$$

Из (1) находим зависимость скорости u тележки от угла α

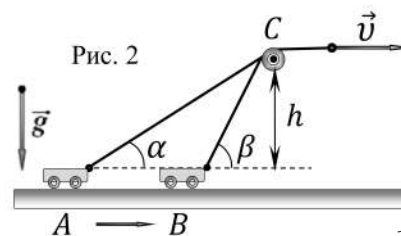
$$u(\alpha) = \frac{v}{\cos \alpha}. \quad (2)$$

Поскольку ускорение есть производная от скорости по времени, продифференцируем (2) по времени, как сложную функцию, учитывая, что угол α тоже зависит от времени (Рис. 2)

$$\alpha = \alpha(t) \implies \alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \omega. \quad (3)$$

По правилам дифференцирования сложной функции получим

$$a = u'(\alpha) = \left(\frac{v}{\cos \alpha} \right)' = -v \frac{(-\sin \alpha)}{(\cos \alpha)^2} \cdot \alpha'(t) = \frac{v \sin \alpha}{(\cos \alpha)^2} \cdot \omega, \quad (4)$$



где ω – угловая скорость вращения нити в данный момент времени.

Угловую скорость ω несложно найти, раскладывая скорость тележки на нормальную $u_{\perp}$ (перпендикулярно нити) и тангенциальную $u_{\parallel}$ (вдоль нити) компоненты

$$\omega = \frac{u_{\perp}}{CB} = \frac{u \sin \alpha}{h / \sin \alpha} = \frac{v (\sin \alpha)^2}{h \cos \alpha}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получаем ускорение тележки

$$a = \frac{v \sin \alpha}{(\cos \alpha)^2} \cdot \omega = \frac{v \sin \alpha}{(\cos \alpha)^2} \cdot \frac{v (\sin \alpha)^2}{h \cos \alpha} = \frac{v^2}{h} (\tan \alpha)^3, \quad (6)$$

Расчет дает

$$a = \frac{v^2}{h} (\tan \alpha)^3 = \frac{1,5^2}{1,0} (\tan 35^\circ)^3 \text{ м/с}^2 = \{0,7724366362\} = 0,77 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad (7)$$

Заметим, что (7) с необходимым количеством значащих цифр можно получить и без производных, используя метод, изложенный в задаче 9-2 «Среднее ускорение». Однако с использованием производных решение выходит гораздо короче.

2. Тележку разгоняет только проекция силы натяжения нити (трения нет), поэтому второй закон Ньютона примет вид

$$ma = m \frac{v^2}{h} (\tan \alpha)^3 = T \cos \alpha. \quad (8)$$

Из (8) найдем

$$T = m \frac{v^2}{h} \frac{(\tan \alpha)^3}{\cos \alpha}. \quad (9)$$

Расчет дает

$$T = 0,35 \frac{1,5^2}{1,0} \frac{(\tan 35^\circ)^3}{\cos 35^\circ} = \{0,3300398559\} = 0,33 \text{ Н}. \quad (10)$$

3. Мощность силы можно посчитать по известной формуле для горизонтального участка нити

$$P = Fv = Tv = m \frac{v^3}{h} \frac{(\tan \alpha)^3}{\cos \alpha}. \quad (11)$$

Расчет дает

$$P = 0,35 \frac{1,5^3}{1,0} \frac{(\tan 35^\circ)^3}{\cos 35^\circ} = \{0,4950597839\} = 0,50 \text{ Н}. \quad (12)$$

Заметим, что (10) и (12) с необходимым количеством значащих цифр можно получить и без производных, используя метод, изложенный в задаче 10-2 «Средняя мощность». Однако с использованием производных решение выходит гораздо короче.

4. Расчеты по полученным формулам дают следующие результаты.

$$a = \frac{v^2}{h} (\tan \alpha)^3 = \frac{1,5^2}{1,0} (\tan 35^\circ)^3 \text{ м/с}^2 = \{0,7724366362\} = 0,77 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad (13)$$

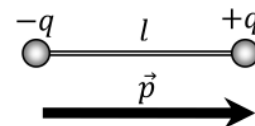
$$T = 0,35 \frac{1,5^2}{1,0} \frac{(\tan 35^\circ)^3}{\cos 35^\circ} = \{0,3300398559\} = 0,33 \text{ Н}. \quad (14)$$

$$P = 0,35 \frac{1,5^3}{1,0} \frac{(\tan 35^\circ)^3}{\cos 35^\circ} = \{0,4950597839\} = 0,50 \text{ Вт}. \quad (15)$$

11-3. «Вокруг диполя»

В электродинамике часто используется модель *диполя* (Рис. 1), представляющая собой два близко расположенных одинаковых по модулю точечных заряда разных знаков.

В качестве реальной модели диполя рассмотрим небольшие заряженные шарики, закрепленные на тонком непроводящем стержне. Электрические заряды шариков равны по модулю и противоположны по знаку (см. Рис. 1), т.е. равны $-q$ и $+q$, соответственно, где ($q > 0$).



Будем считать, что заряженные шарики закреплены на жестком стержне длины l , а все свойства диполя рассматриваются на достаточно больших расстояниях r ($r \gg l$) от его центра.

Диполь принято характеризовать вектором *дипольного момента* $\vec{p} = q\vec{l}$, величина которого равна ql , а направление выбирается вдоль оси диполя от его отрицательного заряда к положительному (см. Рис. 1).

Несмотря на то, что суммарный заряд диполя равен нулю, он создает в пространстве вокруг себя отличное от нуля электростатическое поле, которое несложно посчитать школьными методами.

В данной задаче рассмотрим возможность движения заряженной частицы вокруг диполя по окружности.

*Справочные данные и параметры рассматриваемой системы:** скалярное произведение векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha = ab \cos \alpha$, где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; при малых x ($x \rightarrow 0$) справедливо приближенное равенство: $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$; $\pi = 3,14$.

Часть 1. Поле диполя

Рассмотрим электрический диполь AB (Рис. 2), ориентированный вдоль оси ординат Oy так, что в точке начала координат A расположен заряд $(-q)$, а в точке B – заряд $(+q)$,

соответственно ($q > 0$). Расстояние $AB = l$, соответственно, дипольный момент системы $\vec{p} = ql$.

Перейдем в полярную систему координат, в которой положение произвольной точки $C(r, \theta)$ в плоскости рисунка (см. Рис. 2) задается расстоянием r от начала координат и углом θ , образованным отрезком AC с осью ординат Oy . Рассмотрим электростатическое поле диполя AB в вакууме.

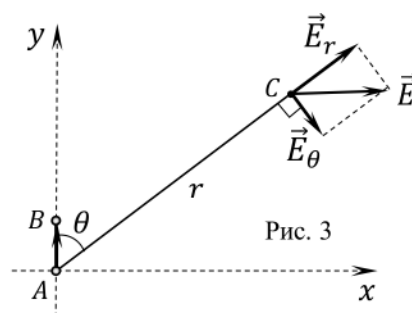
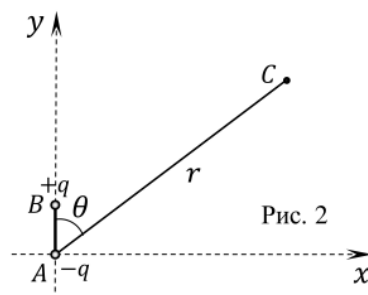
1.1 Найдите потенциал $\varphi(r, \theta)$ электростатического поля диполя в произвольной точке C на достаточном большом удалении от него ($r \gg l$). Запишите полученное выражение через скалярное произведение векторов $\vec{p}$ и $\vec{r}$.

1.2 Разложим напряженность $\vec{E}$ (Рис. 3) поля диполя в точке C на сумму $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$ двух взаимно перпендикулярных составляющих $\vec{E}_r$ и $\vec{E}_\theta$, так, чтобы вектор $\vec{E}_r$ был направлен вдоль отрезка $AC = r$, а вектор $\vec{E}_\theta$ был нормален ему. Определите зависимость $E_r(r, \theta)$ радиальной составляющей поля диполя в точке C .

1.3 Найдите зависимость $E_\theta(r, \theta)$ угловой составляющей поля диполя в точке C .

1.4 Получите формулу для модуля напряженности $E(r, \theta)$ поля диполя в точке C .

1.5 Докажите векторную формулу для напряженности $\vec{E}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$ поля диполя с моментом $\vec{p}$ в произвольной точке с радиус-вектором $\vec{r}$.



Часть 2. Движение вокруг диполя

Частицу массой m с положительным зарядом q^* удерживают в точке A на оси Ox на расстоянии r от центра закрепленного диполя, рассмотренного выше (Рис. 4).

В некоторый момент времени частицу отпускают и она начинает двигаться под действием электростатического поля диполя $\vec{E}(\vec{r})$.

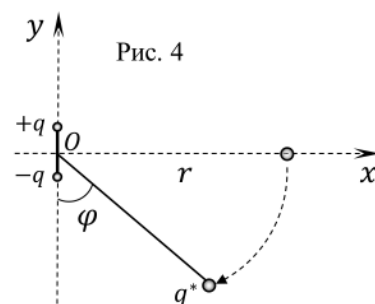
Силой тяжести и силой сопротивления воздуха пренебречь.

2.1 По какой траектории будет двигаться частица? Обоснуйте свое предположение и подтвердите его расчетами, выкладками, формулами.

2.2 Найдите зависимость скорости частицы $v(\varphi)$ от угла φ между радиусом и осью Oy (см. Рис. 4).

2.3 Определите максимальную скорость v_{max} частицы при движении в поле диполя.

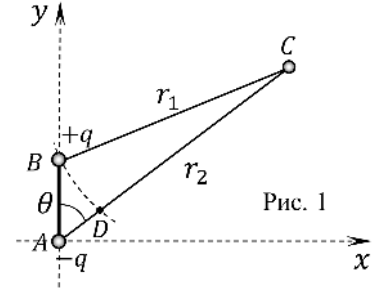
2.4 Определите максимальное ускорение a_{max} частицы при движении в поле диполя.



Возможные решения:

Часть 1. Поле диполя

1.1 Обозначим расстояния от зарядов $(+q)$ и $(-q)$ до точки C через $BC = r_1$ и $AC = r = r_2$, соответственно (Рис. 1). Изобразим диполь на рисунке более крупно, чтобы из геометрических построений заметить, что при больших расстояниях ($r \gg l$) длина дуги BD близка к длине катета BD



$$r_1 = r_2 - AD \approx r_2 - l \cos \theta. \quad (1)$$

Согласно принципу суперпозиции потенциалов электростатических полей искомый потенциал точки C можем записать как сумму потенциалов двух точечных зарядов

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right). \quad (2)$$

Из (2) и (1) получим потенциал диполя на значительном расстоянии ($r_1 \approx r_2 \approx r$)

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{l \cos \theta}{r_1 r_2} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2}. \quad (3)$$

Следовательно, в пределе ($r \rightarrow \infty$) искомое выражение для потенциала $\varphi(r, \theta)$ электростатического поля диполя примет вид

$$\varphi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad (4)$$

где $p = ql$ – дипольный момент системы. Интересно, что, согласно (4), потенциал электростатического поля диполя убывает с расстоянием ($\sim \frac{1}{r^2}$) быстрее, чем потенциал поля точечного заряда ($\sim \frac{1}{r}$). Если использовать математическую подсказку и рассмотреть скалярное произведение векторов

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = pr \cos \theta \quad \implies \quad p \cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r}, \quad (5)$$

то выражение для потенциала (4) можно переписать в «векторном» (достаточно удобном для запоминания) виде для произвольной точки пространства с радиус-вектором $\vec{r}$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}. \quad (6)$$

1.2 Согласно принципу суперпозиции электрических полей напряжённость $\vec{E}$ поля диполя в точке C может быть представлена различными способами

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-. \quad (7)$$

Векторы $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ от зарядов $(+q)$ и $(-q)$ образуют практически развернутый угол (180°), поскольку при $l \ll r$ угол ACB мал, и оба эти вектора ориентированы практически вдоль отрезка AC . Но вектор $\vec{E}_+$ «немного длиннее», поэтому модуль радиальной составляющей E_r равен разности их модулей

$$E_r = E_+ - E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r - AD)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(r - l \cos \theta)^2} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (8)$$

Раскрывая скобки, преобразуем (8) к виду, пренебрегая бесконечно малым слагаемым ($l^2(\cos \theta)^2$) более высокого порядка, т.к. $(r \gg l)$

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2 - 2rl \cos \theta + l^2(\cos \theta)^2} - \frac{1}{r^2} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2 - 2rl \cos \theta} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (9)$$

Далее используем математическую подсказку

$$\frac{1}{r^2 - 2rl \cos \theta} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{2l \cos \theta}{r}} \right) \approx \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{2l \cos \theta}{r} \right), \quad (10)$$

тогда (9) примет вид

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{2l \cos \theta}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \right) = \frac{2ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \cos \theta. \quad (11)$$

Из (11) следует, что по мере увеличения угла θ величина E_r убывает, и при $\theta = \frac{\pi}{2}$ (т.е. на оси Ox) становится равной нулю. Далее ($\theta > \frac{\pi}{2}$) (11) принимает отрицательные значения, т.е. напряженность поля поменяет свое направление (к диполю).

1.3 Для нахождения угловой составляющей $E_\theta(r, \theta)$ поля диполя запишем для малого угла $A\hat{C}B$ равенство

$$A\hat{C}B = \frac{BD}{r} = \frac{l \sin \theta}{r}. \quad (12)$$

Соответственно, для малых углов длину хорды в векторном треугольнике (7) также можно заменить на длину дуги, т.е.

$$E_\theta = E_- \cdot A\hat{C}B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \frac{l \sin \theta}{r} = \frac{ql \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sin \theta. \quad (13)$$

Заметим, что (11) и (13) можно получить быстрее, взяв производные (со знаком «минус») от потенциала (4) по соответствующим направлениям.

1.4 По теореме Пифагора получим для модуля напряженности диполя

$$E(r, \theta) = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3(\cos \theta)^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3(\cos \theta)^2}. \quad (14)$$

1.5 Для доказательства приведенной в условии формулы введем взаимно перпендикулярные единичные векторы $\vec{a}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ и $\vec{a}_\theta$, направленные вдоль отрезка AC и перпендикулярно ему.

С учетом (5) перепишем (11) в векторном виде, не привязанном к какой-либо системе координат. Тогда получим

$$\vec{E}_r = E_r \cdot \vec{a}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{r^3} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r} \vec{a}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{r^3} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right). \quad (15)$$

Поступая аналогично с (13), следует выразить $\vec{a}_\theta$ как разность уже известных векторов прямоугольного треугольника на Рис. 3 в условии

$$\vec{E}_\theta = -E_\theta \cdot \vec{a}_\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left(\vec{p} - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^2} \vec{r} \right). \quad (16)$$

Тогда вектор напряженности поля диполя будет равен

$$\vec{E} = E_r \cdot \vec{a}_r + E_\theta \cdot \vec{a}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right). \quad (17)$$

Объединяя (15) и (16), получаем искомое векторное выражения для поля диполя в произвольной точке пространства

$$\vec{E}(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left(\vec{p} - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^2} \vec{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right). \quad (18)$$

Часть 2. Движение вокруг диполя

2.1 В точке старта A на частицу q^* будет действовать угловая составляющая E_θ напряженности электрического поля диполя, которая сдвинет его с места и начнет разгонять.

В свою очередь, радиальная составляющая E_r поля, направленная в начало координат, начнет поворачивать вектор скорости частицы. Вследствие этого, траектория частицы уже не будет прямой, а будет представлять собой некую кривую.

Предположим, что эта кривая будет дугой окружности радиуса r , центр которой находится в центре диполя (начале координат).

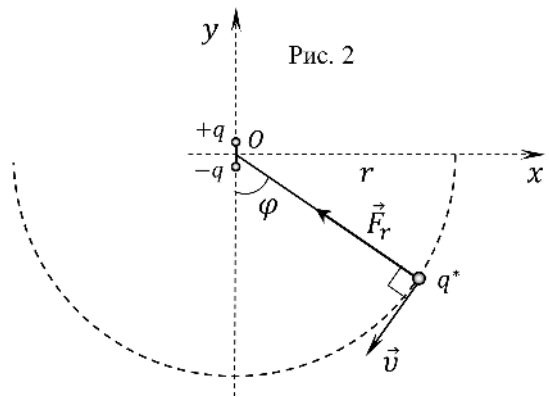


Рис. 2

Обоснуем наше предположение. Рассмотрим заряд q^* в момент, когда радиус r составляет с осью Oy угол φ (Рис. 2).

Поскольку в этой части задачи удобнее использовать другой угол, то для использования ранее полученных выражений следует учесть, что

$$\varphi = \pi - \theta \quad \Longrightarrow \quad \theta = \pi - \varphi \quad . \quad (19)$$

Для движения по окружности радиуса r необходимо выполнение второго закона Ньютона в проекции на радиальное направление (чтобы сила диполя смогла сообщить шарiku необходимое центростремительное ускорение). С учетом (11) это условие примет вид

$$ma_r = \frac{mv^2}{r} = q^* E_r = q^* \left(\frac{2ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = \frac{q^* ql \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (20)$$

Выражая из (20) зависимость скорости от угла, получим

$$v(\varphi) = \sqrt{\frac{q^* ql \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0 mr^2}}. \quad (21)$$

Таким образом, для движения частицы по дуге окружности необходимо и достаточно, чтобы её скорость возрастала при уменьшении угла φ по закону (21).

С другой стороны, изменить модуль скорости частицы может только угловая составляющая электрического поля E_θ . Согласно закону сохранения энергии с учетом (4) для этого процесса получим

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{q^* q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \varphi}{r^2} = 0. \quad (22)$$

Из (22) найдем скорость частицы при угле φ

$$v(\varphi) = \sqrt{\frac{q^* ql \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0 mr^2}}. \quad (23)$$

Удивительным образом выражения (23) и (21) для скорости частицы совпали. Это значит, что электростатическое поле диполя само, «автоматически» будет разгонять и поворачивать частицу, обеспечивая ей при любом угле φ (т.е. в любой момент времени) возможность движения по окружности радиуса r .

2.2 Как следует из предыдущего пункта решения, искомую зависимость $v(\varphi)$ можно находить двумя способами: как из второго закона Ньютона, так и из закона сохранения энергии. Естественно, оба способа приводят к одному и тому же результату

$$v(\varphi) = \sqrt{\frac{q^* ql \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0 mr^2}}. \quad (24)$$

2.3 Из (24) следует, что максимальная скорость v_{max} частицы достигается при пересечении ею оси Oy , т.е. при $\varphi = 0$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{q^*ql}{2\pi\varepsilon_0mr^2}}. \quad (25)$$

Далее движение частицы будет замедляться, она остановится в точке симметричной точке старта и пойдет «назад», т.е. в системе возникнут негармонические колебания большой амплитуды.

2.4 Максимальное ускорение a_{max} найдем, используя (20). Как видим, это опять же происходит при $\varphi = 0$. При этом ускорение определяется только радиальной составляющей поля диполя (тангенциальное ускорение исчезает), следовательно

$$a_{max} = a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{q^*E_{max}}{m} = \frac{q^*ql}{2\pi\varepsilon_0mr^3}. \quad (26)$$