

Решение

Задание 11-1. Водоворот (Одна длинная задача)

Оборудование: внешний стакан калориметра из набора «Актива БГУ», кружка пластиковая (1,0л) с водой (800мл), шприц (60мл), кусочки фольги в коробочке из под спичек (примерные размеры 5х5мм, 10шт), секундомер с памятью 30-ти моментов и отрезков времени (можно пользоваться секундомером на мобильном телефоне), ложка одноразовая большая для «раскручивания» воды, линейка пластмассовая (20см), салфетки для удаления капель воды. На краю стакана калориметра маркером должна быть нанесена маленькая тёмная метка для более удобного отсчитывания оборотов воды.

Предупреждение!!! Если участники олимпиады в качестве секундомера используют мобильные телефоны, то запрещено пользоваться иными функциями телефона в том числе и калькулятором. При нарушении данного требования участник дисквалифицируется.

В данной задаче Вам предстоит исследовать инертное вращение воды в цилиндрическом сосуде. Под инертным вращением воды будем понимать монотонное замедление её вращения под действием сил вязкого трения. Налейте во внешний стакан от калориметра воды на $1/4$ его объема. С помощью ложечки приведите жидкость во вращательное движение. Поместите на поверхность воды кусочек фольги (это метка по которой вы будете отсчитывать период обращения воды). Кусочек фольги просто сбрасывайте на поверхность воды с высоты 5 - 10см, фольга должна удерживаться на воде силами поверхностного натяжения. Постарайтесь чтобы фольга попадала примерно на середину радиуса. Обороты воды отсчитывайте по прохождению кусочка фольги мимо метки на краю стакана. Важно, чтобы фольга на протяжении всего времени вращения жидкости оставалась примерно на одной окружности, если фольга сместилась к стенкам стакана и цепляется за них, то проводите измерения заново. Пронаблюдайте вращение жидкости. Вы можете видеть, что после «раскрутки» скорость вращательного движения воды постепенно убывает. В целях данной задачи замедление вращения жидкости будем описывать **характерным временем замедления вращения**. Далее будем использовать укороченную версию данного термина – характерное время.

Под *характерным временем* (t_x) будем понимать время, за которое период вращения воды увеличивается в десять раз.

В данной задаче Вам необходимо будет исследовать зависимость характерного времени t_x от объёма налитой в стакан жидкости V .

При проведении экспериментов старайтесь сообщать воде примерно одинаковую начальную угловую скорость. Отсчёт времени начинайте так, чтобы период начального оборота жидкости был в интервале от 1,5с до 2,5с. Начальный оборот не обязательно будет первым и в большинстве экспериментов начальный оборот первым не будет. Не тратьте время стараясь добиться того, чтобы в каждом эксперименте у вас был одинаковый период начального

оборота. Вы этого не сможете сделать. Достаточно, чтобы значение начального периода находилось в указанном выше интервале. Значение конечного периода должно быть примерно в 10 раз больше начального. Конечный период не обязательно будет последним в данном эксперименте. Опять же у Вас не получится чтобы значения начального и конечного периодов отличались ровно в 10 раз. Поэтому можно использовать значение конечного периода, которое будет отличаться от начального в 9 – 11 раз.

Пример оформления первичных экспериментальных данных

Эксп. 4 Объём воды $V = 330\text{мл}$

Номер оборота n	Момент времени окончания оборота t_i , с	Период оборота окончания оборота оборота n t_i , с T_i , с
...	...	...
3	1,89	5,04
4	1,95	6,99
5	2,68	9,67
...	...	...
11	9,76	44,44
12	13,21	57,65
13	20,27	77,92

Промежуточные экспериментальные данные. В целях экономии времени их можно не записывать

Период и момент окончания начального оборота

Промежуточные экспериментальные данные. В целях экономии времени их можно не записывать

Период и момент окончания конечного оборота

$$\frac{T_{13}}{T_4} = \frac{20,27\text{с}}{1,95\text{с}} = 10,4$$

$$t_x = t_{13} - t_4 = 77,92\text{с} - 6,99\text{с} = 70,93\text{с}$$

Первичные экспериментальные данные оформляйте в соответствии с указанным примером. Это упростит проверку Вашей работы. Периоды и моменты времени, которые Вы будете использовать в вычислениях обязательно в таблицах подчеркнуть.

Часть 1. Эксперимент

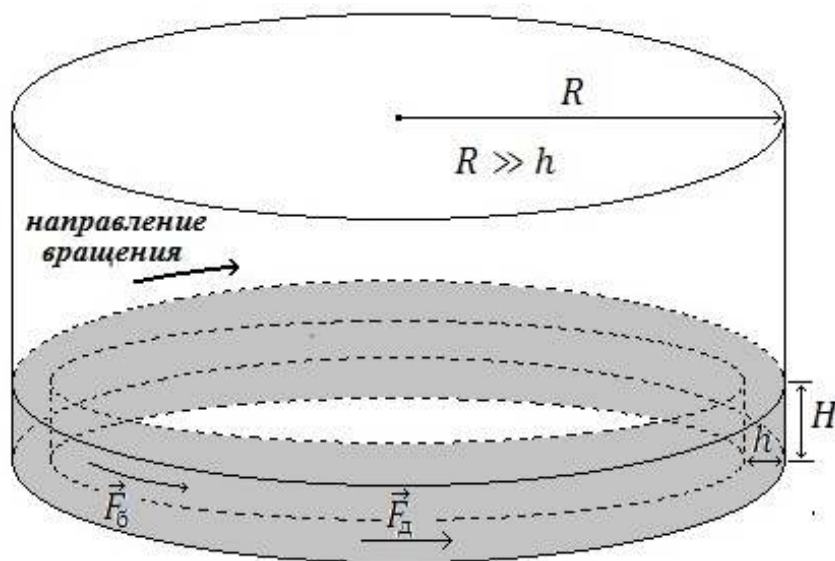
1.1 Исследуйте экспериментально зависимость периода вращения T воды от номера оборота n для различных значений объёма воды V в сосуде. *Указание:* для каждого значения объёма воды у вас должна быть составлена таблица как показано в примере, вычислено отношение конечного и начального периодов и характерное время. Начинайте с объёма воды 150мл и в каждом последующем эксперименте добавляйте по 60мл. Чтобы вдруг не забыть, долили воду или нет, измеряйте высоту уровня воды линейкой. Результат переписанный с примера не засчитывается!*

Часть 2. Обработка результатов

2.1 Составьте таблицу зависимости характерного времени от объёма налитой в сосуд жидкости $t_x(V)$. **2.2** Постройте график зависимости характерного времени от объёма налитой в сосуд жидкости $t_x(V)$.

Часть 3. Теоретическое описание

При поступательном движении твёрдого цилиндрического стержня (длина стержня много больше радиуса поперечного сечения) в вязкой среде таким образом, что вектор скорости направлен вдоль оси стержня, если обтекающие его потоки среды являются ламинарными, можно считать, что силы вязкого трения, действующие на стержень пропорциональны его скорости относительно среды и площади его боковой поверхности $\vec{F}_c = -kS\vec{v}$ (1), где k - некоторый коэффициент, S - площадь боковой поверхности стержня. При этом, если на стержень в вязкой среде действуют только силы вязкого трения, то характерное время уменьшения его скорости будет определяться выражением $t_x = Z \frac{m}{kS}$ (2), где m - масса стержня, Z - некоторое число без единиц измерения.



3.1 Рассмотрите инертное вращение в цилиндрическом сосуде тонкого кольца воды прямоугольного сечения (рис.1). Радиус кольца много больше длины стороны его поперечного сечения, которая расположена в плоскости основания сосуда. На кольцо воды действуют силы вязкого трения со стороны основания $\vec{F}_д$ и боковой стенки сосуда $\vec{F}_б$.

Будем считать, что модель, описанную выше, можно применять и к инертному вращению тонкого кольца воды в цилиндрическом сосуде. Получите для данного случая уравнение зависимости $t_x(H)$, где H - длина стороны сечения кольца воды, которая расположена вдоль боковой стенки сосуда. Используйте так же следующие обозначения: ρ - плотность воды, R - радиус кольца воды и основания сосуда, h - длина стороны поперечного сечения кольца воды, которая расположена в плоскости основания сосуда, считайте, что $h = \text{const}$ и $h \ll R$.

3.2 Получите уравнение зависимости $t_x(V)$ для случая инертного вращение кольца воды.

3.3 Линеаризируйте зависимость $t_x(V)$. Укажите какие величины в Вашем линеаризованном уравнении будут соответствовать величинам y , x , a , b в линейном уравнении $y = ax + b$. Укажите единицы измерения для a и b .

Часть 4. Приложение теории к эксперименту

4.1 Будем считать, что зависимость $t_x(V)$, полученную Вами в п. 3.2 (но с другими значе-

ниями коэффициентов) можно использовать для описания явления, исследованного в частях 1 и 2 данной задачи. Постройте линеаризованный график по полученным экспериментальным данным. Используя простую графическую обработку (ПГО) или метод наименьших квадратов (МНК), определите средние значения, абсолютную и относительную погрешности углового коэффициента усредняющей прямой a и свободного слагаемого b .

4.2 Определите значение характерного времени t_x для больших высот воды в сосуде ($H \rightarrow \infty$).

Задание 11-1. Водоворот (решение)

1. Эксперимент

1.1

Эксп. 1	V=150 см ³	
№	T _i , с	t _i , с
1	1,93	1,93
2	2,29	4,22
3	3,04	7,26
4	4,25	11,51
5	6,61	18,12
6	10,98	29,10
7	23,91	53,01
$\frac{T_7}{T_2} = \frac{23,91\text{с}}{2,29\text{с}} = 10,4$		
$t_x = t_7 - t_2 = 53,01\text{с} - 4,22\text{с} = 48,79\text{с}$		

Эксп. 4	V=330 см ³	
№	T _i , с	t _i , с
3	1,89	5,04
4	1,95	6,99
5	2,68	9,67
...	...	...
11	9,76	44,44
12	13,21	57,65
13	20,27	77,92
$\frac{T_{13}}{T_4} = \frac{20,27\text{с}}{1,95\text{с}} = 10,4$		
$t_x = t_{13} - t_4 = 77,92\text{с} - 6,99\text{с} = 70,93\text{с}$		

<u>Эксп. 2</u>	V=210 см ³	
№	T _i , c	t _i , c
1	1,7	1,70
2	2,09	3,79
3	2,57	6,36
...	...	...
7	8,33	26,70
8	12,26	38,96
9	21,37	60,33
$\frac{T_9}{T_2} = \frac{21,37c}{2,09c} = 10,2$		
$t_x = t_9 - t_2 = 60,33c - 3,79c = 56,54c$		

<u>Эксп. 5</u>	V=390 см ³	
№	T _i , c	t _i , c
2	1,51	2,96
3	1,75	4,71
4	1,91	6,62
...	...	...
14	12,64	61,75
15	17,78	79,53
16	28,59	108,12
$\frac{T_{15}}{T_3} = \frac{17,78c}{1,75c} = 10,2$		
$t_x = t_{15} - t_3 = 79,53c - 4,71c = 74,82c$		

<u>Эксп. 3</u>	V=270 см ³	
№	T _i , c	t _i , c
1	1,89	1,89
2	2,14	4,03
3	2,10	6,13
...	...	...
10	12,38	46,42
11	17,69	64,11
12	29,78	93,89
$\frac{T_{11}}{T_1} = \frac{17,69c}{1,89c} = 9,4$		
$t_x = t_{11} - t_1 = 64,11c - 1,89c = 62,22c$		

<u>Эксп. 6</u>	V=450 см ³	
№	T _i , c	t _i , c
4	1,59	5,65
5	1,65	7,30
6	1,71	9,01
...	...	...
17	11,41	66,18
18	16,88	83,06
19	26,28	109,34
$\frac{T_{18}}{T_5} = \frac{16,88c}{1,65c} = 10,2$		
$t_x = t_{18} - t_5 = 83,06c - 7,30c = 75,76c$		

Эксп. 7	V=510 см ³	
№	T _i , c	t _i , c
3	1,70	4,68
4	1,87	6,55
5	2,11	8,66
...	...	...
16	12,96	71,30
17	18,05	89,35
18	27,07	116,42
$\frac{T_{17}}{T_4} = \frac{18,05c}{1,87c} = 9,7$		
$t_x = t_{17} - t_4 = 89,35c - 6,55c = 82,80c$		

Эксп. 9	V=630 см ³	
№	T _i , c	t _i , c
4	1,73	6,54
5	1,81	8,35
6	2,02	10,37
16	14,16	76,91
17	18,51	95,42
18	27,30	122,72
$\frac{T_{17}}{T_5} = \frac{18,51c}{1,81c} = 10,2$		
$t_x = t_{17} - t_5 = 95,42c - 8,35c = 87,07c$		

Эксп. 8	V=570 см ³	
№	T _i , c	t _i , c
4	1,60	6,09
5	1,71	7,80
6	1,91	9,71
...	...	...
18	13,35	76,20
19	17,03	93,23
20	25,95	119,18
$\frac{T_{19}}{T_5} = \frac{17,03c}{1,71c} = 10,0$		
$t_x = t_{19} - t_5 = 93,23c - 7,80c = 85,43c$		

Эксп. 10	V=690 см ³	
№	T _i , c	t _i , c
3	1,70	4,83
4	1,84	6,67
5	2,01	8,68
...	...	...
16	14,75	75,52
17	19,46	94,98
18	24,96	119,94
$\frac{T_{17}}{T_4} = \frac{19,46c}{1,84c} = 10,6$		
$t_x = t_{17} - t_4 = 94,98c - 6,67c = 88,31c$		

2. Обработка результатов

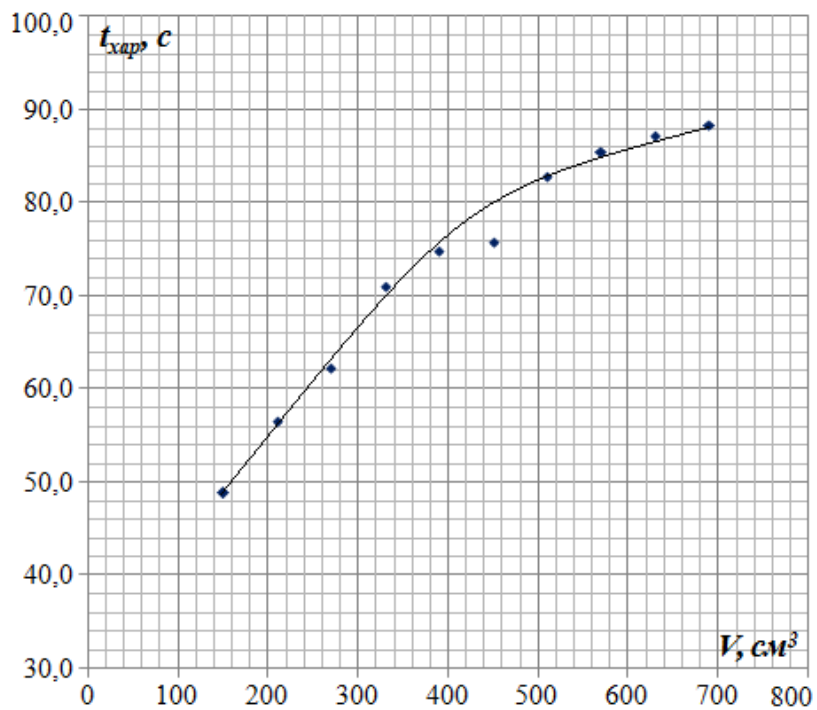
2.1

Таблица 11. Зависимость $t_x(V)$

$V, \text{ см}^3$	$t_{\text{хар}}, \text{ с}$
150	48,79
210	56,54
270	62,22
330	70,93
390	74,82
450	75,76
510	82,80
570	85,43
630	87,10
690	88,30

2.2

График 1. Зависимость $t_x(V)$



3. Теоретическое описание

3.1 При инертном вращении в цилиндрическом сосуде тонкого кольца воды прямоугольного

сечения на кольцо будут действовать силы вязкого трения со стороны дна сосуда, модуль которой равен

$$F_d = k_d 2\pi R h v \quad (3)$$

и со стороны боковой стенки сосуда, модуль которой равен

$$F_6 = k_6 2\pi R H v. \quad (4)$$

Модуль результирующей силы сопротивления:

$$F_c = k_d 2\pi R h v + k_6 2\pi R H v = (k_d 2\pi R h + k_6 2\pi R H) v. \quad (5)$$

Уравнение для характерного времени уменьшения скорости кольца примет вид:

$$t_x = \frac{Zm}{k_d 2\pi R h + k_6 2\pi R H}. \quad (6)$$

Массу кольца воды представим как:

$$m = \rho 2\pi R H h. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим:

$$t_x = \frac{Z\rho 2\pi R H h}{k_d 2\pi R h + k_6 2\pi R H} = \frac{Z\rho H h}{k_d h + k_6 H}. \quad (8)$$

3.2 Представим объём кольца воды в следующем виде:

$$V = 2\pi R H h. \quad (9)$$

Из (9) получим:

$$H = \frac{V}{2\pi R h}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8), получим:

$$t_x = \frac{Z\rho \frac{V}{2\pi R h} h}{k_d h + k_6 \frac{V}{2\pi R h}} = \frac{Z\rho V h}{k_d 2\pi R h^2 + k_6 V}. \quad (11)$$

3.3 Представим уравнение (11) в виде $\frac{1}{t_x} \left(\frac{1}{V} \right)$:

$$\frac{1}{t_x} = \frac{k_d 2\pi R h}{Z\rho} \cdot \frac{1}{V} + \frac{k_6}{Z\rho h}. \quad (12)$$

Сравнивая уравнение (12) с линейным уравнением $y = ax + b$, получим:

$$y = \frac{1}{t_x}, \quad (13)$$

$$x = \frac{1}{V}, \quad (14)$$

$$a = \frac{k_d 2\pi R h}{Z \rho}, \quad [a] = 1 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}, \quad (15)$$

$$b = \frac{k_6}{Z \rho h}, \quad [b] = \frac{1}{\text{с}}. \quad (16)$$

4. Приложение теории к эксперименту

4.1 Составим таблицу значений $\frac{1}{t_x}$ и $\frac{1}{V}$ (таблица 12)

Таблица 12. Значения $\frac{1}{t_x}$ и $\frac{1}{V}$

	$\frac{1}{V}, \text{м}^{-3}$	$\frac{1}{t_x}, \text{с}^{-1}$
	0,00667	0,0205
	0,00476	0,0177
	0,00370	0,0161
	0,00303	0,0141
	0,00256	0,0134
	0,00222	0,0132
	0,00196	0,0121
	0,00175	0,0117
	0,00159	0,0115
	0,00145	0,0113
сред	0,00297	0,0142
дисп	0,000002	0,000008
ковар		0,0000045
N	$a, \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$	$b, \frac{1}{\text{с}}$
10	1,82	0,0087
	$\Delta a, \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$	$\Delta b, \frac{1}{\text{с}}$
	0,13	0,0005
коррел	0,995	

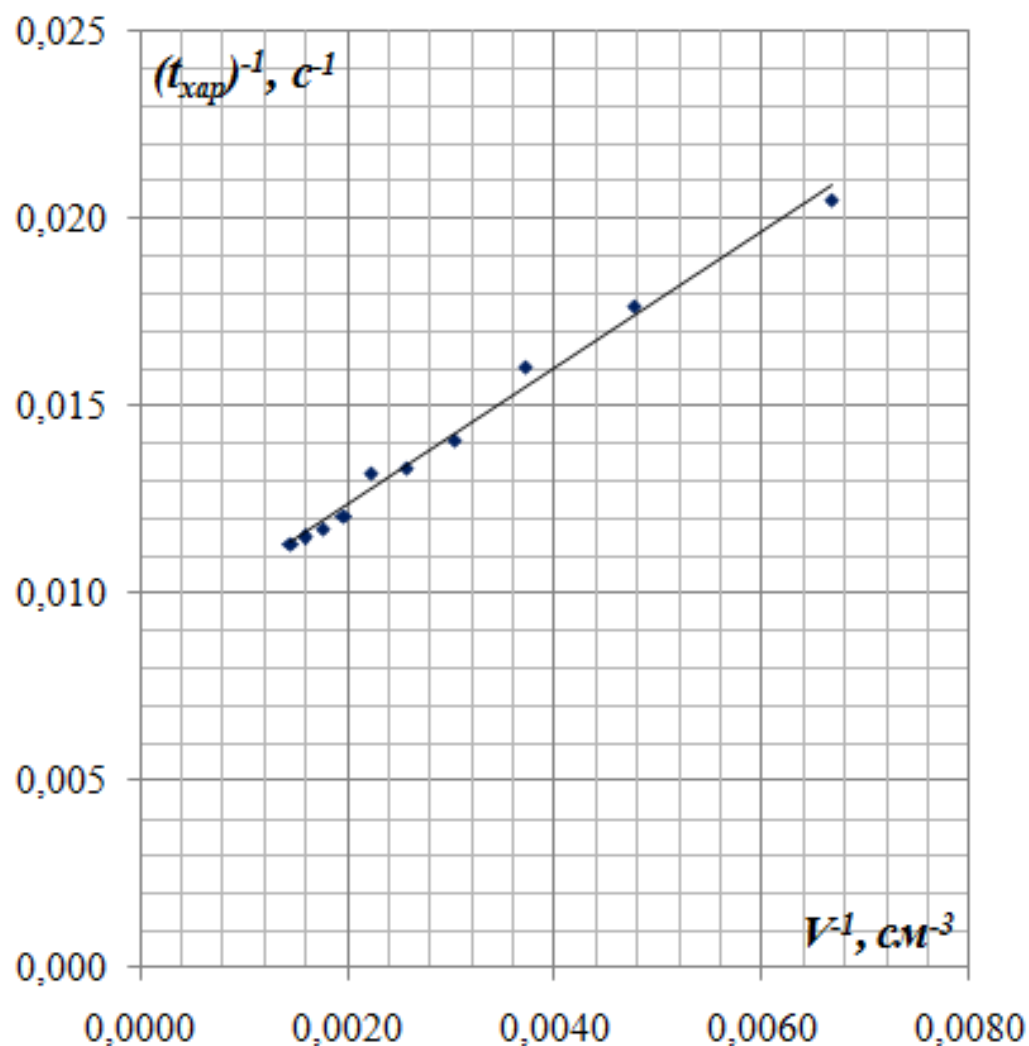


График 2. Зависимость $\frac{1}{t_x} \left(\frac{1}{V} \right)$,

Средние значения и абсолютная погрешность углового коэффициента усредняющей прямой и свободного слагаемого вычислены по МНК и представлены в таблице 12. Относительные погрешности:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{\langle a \rangle} = \frac{0,13 \frac{\text{M}^3}{\text{c}}}{1,82 \frac{\text{M}^3}{\text{c}}} = 0,071 = 7,1\%, \quad (17)$$

$$\varepsilon_b = \frac{\Delta b}{\langle b \rangle} = \frac{0,0005 \frac{\text{M}^3}{\text{c}}}{0,0087 \frac{\text{M}^3}{\text{c}}} = 0,057 = 5,7\%. \quad (18)$$

$$\frac{1}{t_x} = 1,82 \cdot \frac{1}{V} + 0,0087 \text{ (c}^{-1}\text{)}. \quad (19)$$

4.2 Если высота сосуда будет много больше радиуса его основания и вода полностью заполняет сосуд, то это равносильно тому, что в уравнении (12) $V \rightarrow \infty$. Следовательно

$$\frac{1}{t_x} = b = 0,0087\text{с}^{-1}. \quad (20)$$

Откуда

$$\langle t_x \rangle = \frac{1}{0,0087\text{с}^{-1}} = 115\text{с}.$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon_{t_x} = \frac{\Delta b}{\langle b \rangle} = \frac{0,0005\frac{\text{м}^3}{\text{с}}}{0,0087\frac{\text{м}^3}{\text{с}}} = 0,057 = 5,7\%. \quad (21)$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta t_x = \langle t_x \rangle \cdot \varepsilon_{t_x} = 115\text{с} \cdot 0,057 = 7\text{с}. \quad (22)$$

$$t_x = \langle t_x \rangle \pm \Delta t_x = (115 \pm 7)\text{с}.$$